À bas le monopole du cercle !

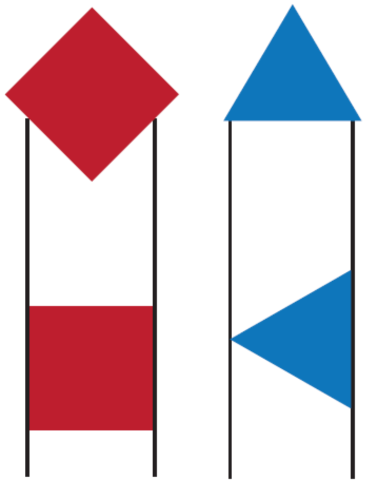
An!k Trahan
Cégep de Sherbrooke

Les ronds sont partout

Voici des exceptions que j'ai trouvées

Caractéristiques de ces objets

- Une bonne plaque d'égout ne devrait pas tomber dans le trou.
- Une bonne pièce de monnaie devrait être facilement identifiable et manipulable par des machines simples.
- Une roue devrait tourner sans faire sautiller l'objet.
- Un trou devrait être facilement fait par une perceuse.
- Les boules peuvent facilement rouler.

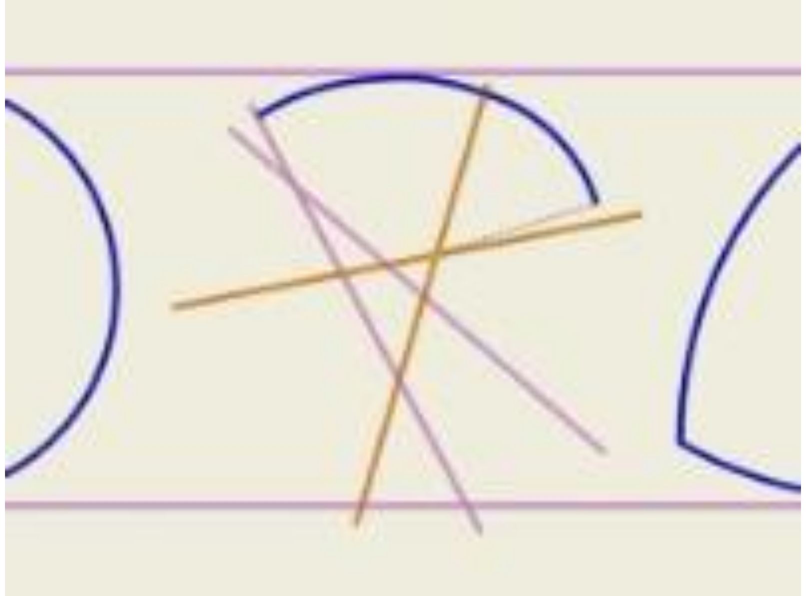


Les premières caractéristiques se résument ainsi :

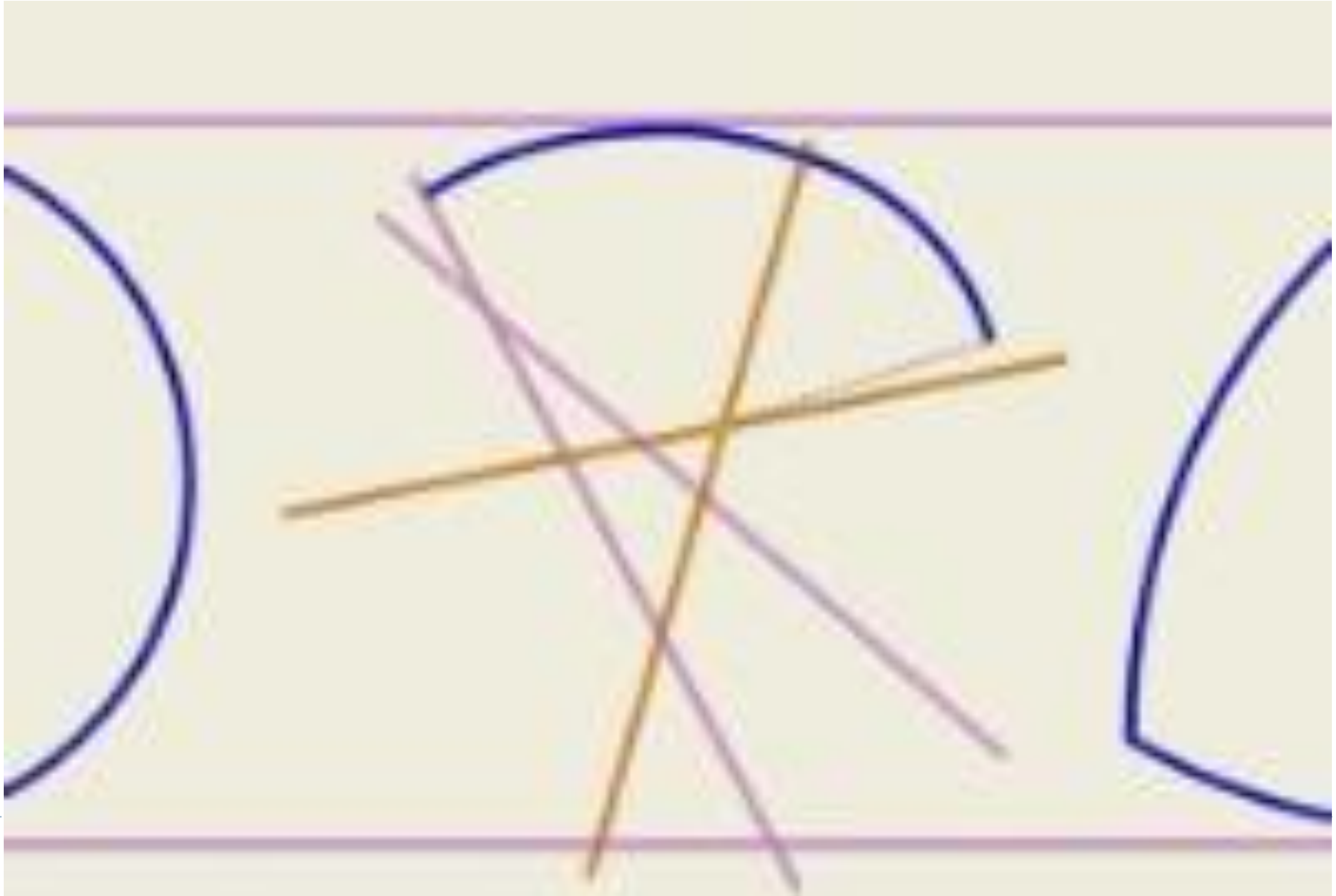
Les formes doivent être de largeur constante.

Définitions

- Une figure convexe est de largeur constante s'il existe deux droites parallèles de distance fixe qui sont en contact avec le contour de la figure, peu importe son orientation. La distance entre ces deux droites est appelée le diamètre de la figure.

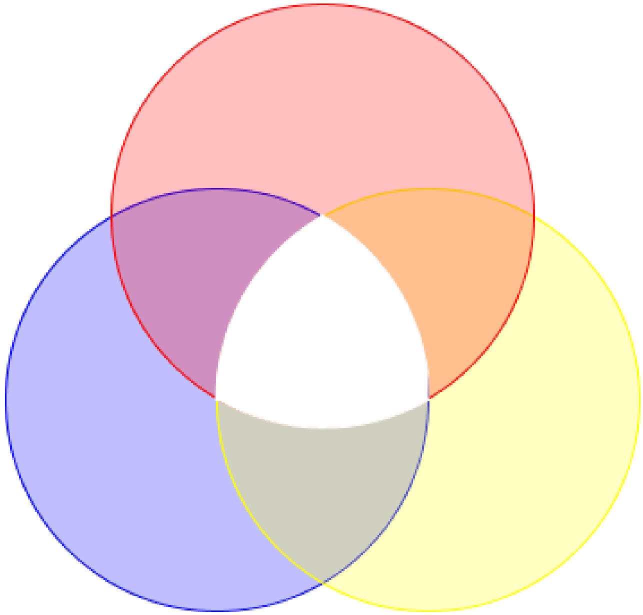


Le triangle de Reuleaux



Le triangle de Reuleaux

Soit un triangle de Reuleaux construit à partir de 3 cercles de rayon de longueur *d.*

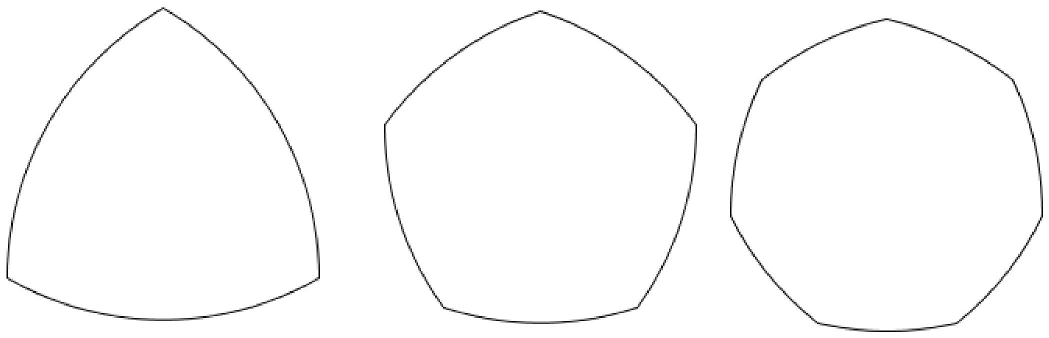


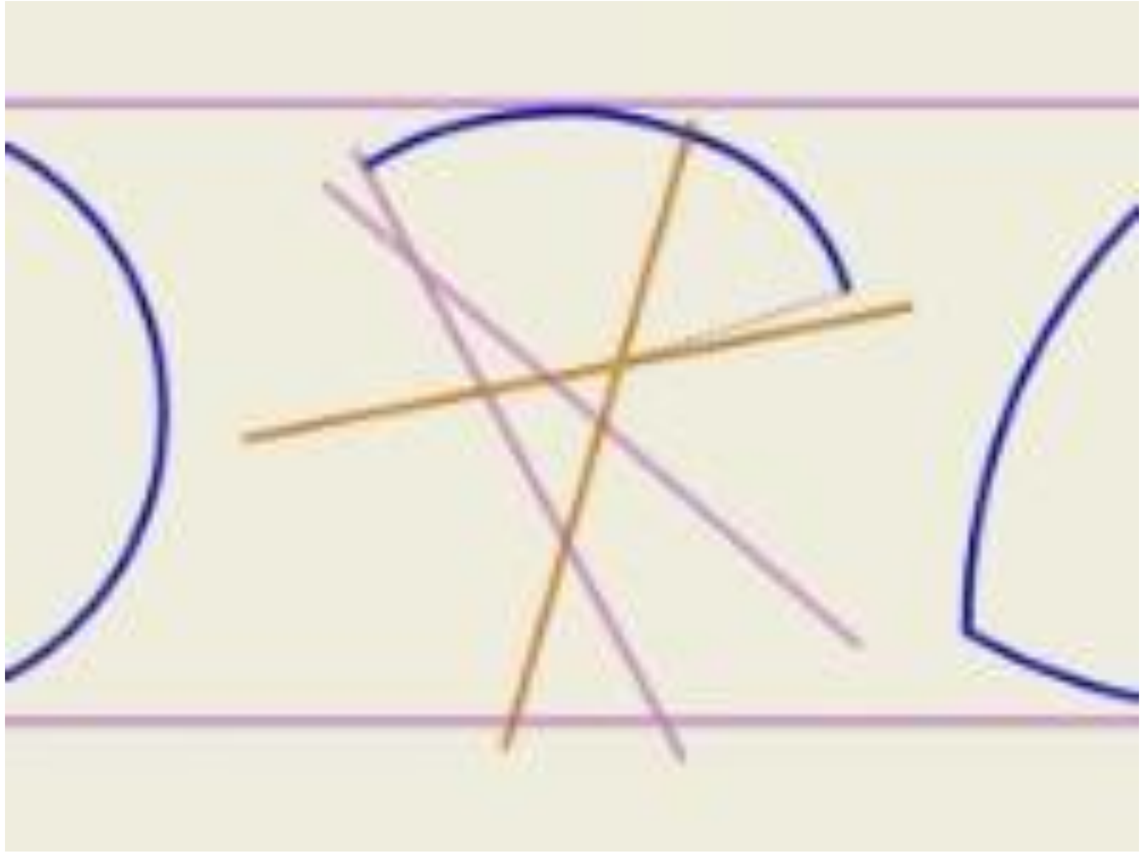
- La figure est convexe.
- La figure est de largeur constante.
- Le diamètre est *d.*
- Le contour de la figure mesure πd et sa surface est

$$\left(\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}\right)d^2 \approx 0{,}897\left(\pi\frac{d^2}{4}\right) \approx 0{,}705d^2.$$

Autres polygones de Reuleaux

- Il est possible de construire une figure de largeur constante à partir de tout polygone régulier ayant un nombre impair de côtés.

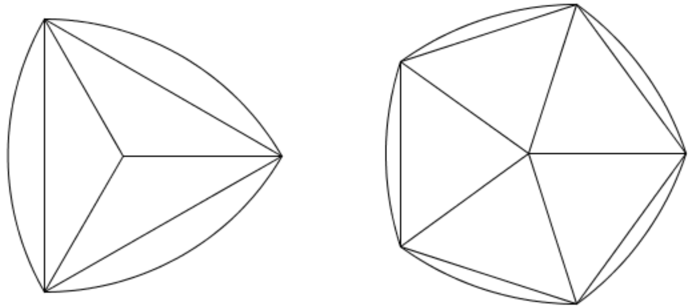




- Pourquoi un nombre impair de côtés?

Propriétés des polygones de Reuleaux

Soit un polygone de Reuleaux avec *n* arcs de cercle (*n* impair) dont les rayons sont de longueur *d.*

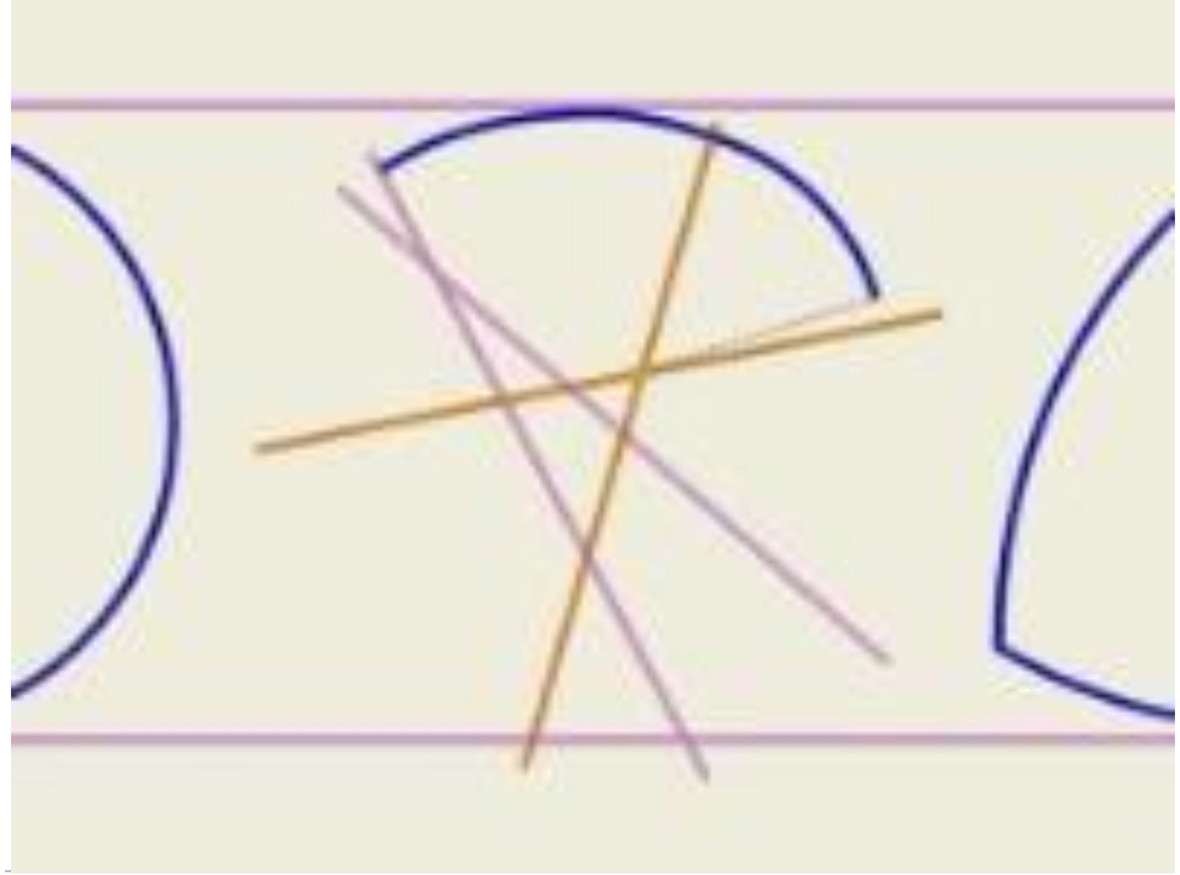


- La figure est convexe.
- La figure est de largeur constante.
- Le diamètre de la figure est *d.*
- Le contour de la figure mesure πd et sa surface est

$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n}{2}\sin\left(\frac{180^{\circ}}{n}\right)+n\left(\frac{1-\cos\left(\frac{180^{\circ}}{n}\right)}{2\tan\left(\frac{180^{\circ}}{n}\right)}\right)\right)d^{2}=\frac{\pi}{2}d^{2}-\frac{n}{2}\tan\left(\frac{90^{\circ}}{n}\right)d^{2}.$$

Y a-t-il d'autres formes de largeur constante?

- Oui, il y a plusieurs autres constructions de figures de largeur constante, en voici une qui commence à partir de 3 points alignés et d'un 4e point.

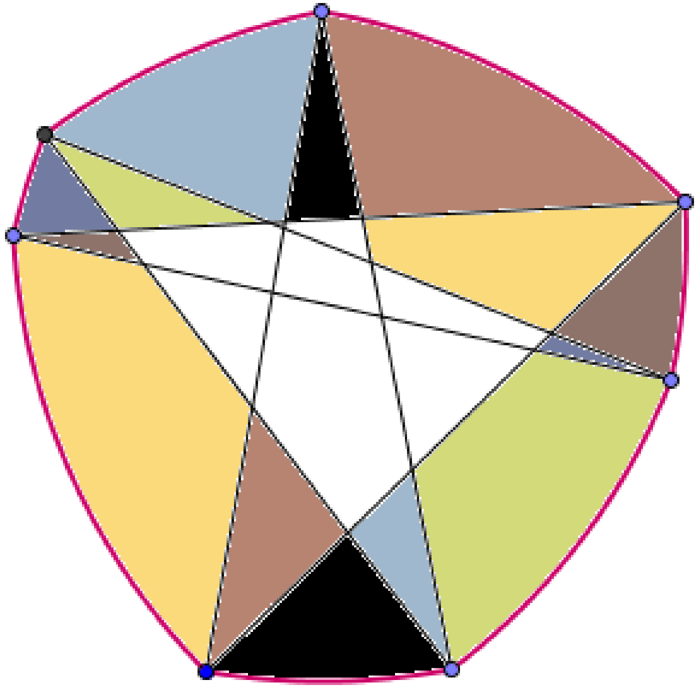


Propriétés de cette surface

- C'est une figure de largeur constante.
- La courbe n'a pas de coin (elle est dérivable aux points de jonction de deux cercles).

Voici une autre construction

Nombre impair de côtés, à partir d'un diamètre



Propriété du contour des formes de largeur constante

Théorème de Barbier

Soit une figure de largeur constante de diamètre de longueur d, alors son contour est de longueur πd.

Ce théorème est une généralisation du **Théorème du compte de Buffon**

Si on laisse tomber une aiguille de longueur l sur un plancher formé de planches de largeur L ($l \leq L$), alors la probabilité qu'une aiguille touche à une ligne du plancher est $\frac{2l}{\pi L}$.

Exemple.

Idée de la démonstration de Barbier

$$\text{Quand } N \to \infty: \frac{n}{N} = \frac{2l}{\pi L}$$

N: Nombre de lancers

n: Nombre d'intersections

l: longueur de l'aiguille

L: Distance entre les lignes du plancher

$$l = \frac{nL\pi}{2N}$$

Prenons une courbe qu'on divise en k petites courbes de longueur l_i.

Soit n_i le nombre d'intersections de la i-ème petite courbe.

La longueur de la courbe est la somme des l_i.

$$\text{Quand } k \to \infty: l_i = \frac{n_i L\pi}{2N}$$

$$\text{Quand } k \to \infty: l = \frac{nL\pi}{2N}$$

Idée de la démonstration de Barbier

Lançons des figures à diamètre constant de diamètre d sur un plancher avec des lignes séparées d'une distance d.

N: Nombre de lancers

n: Nombre d'intersections

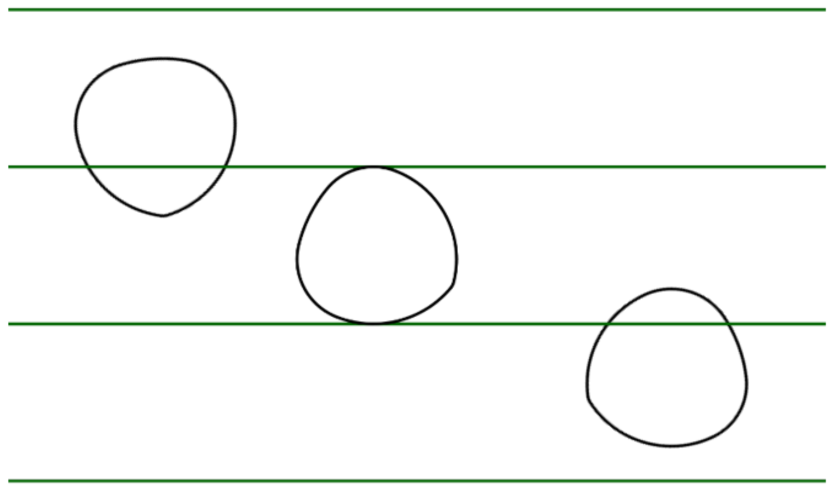
l: longueur de contour de la figure

d: Distance entre les lignes du plancher

Pour chaque lancé, il y a 2 intersections.

$$n = 2N$$

$$\text{Quand } N \to \infty: l = \frac{nL\pi}{2N}$$

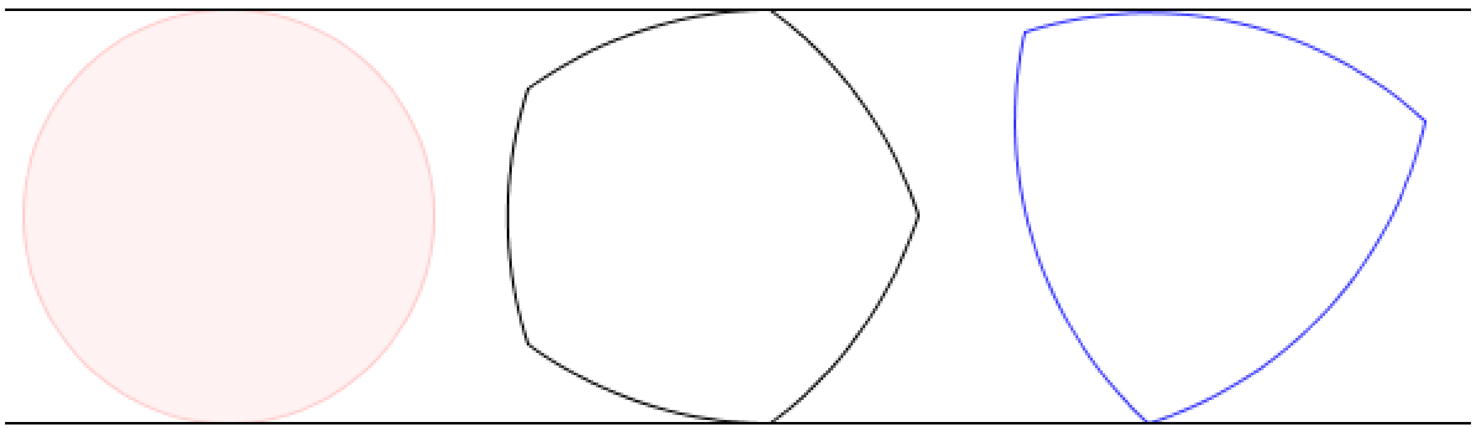


$$\text{Quand } N \to \infty: l = \frac{2N\pi d}{2N} = \pi d$$

Propriété de la surface

Théorème de LeBesgue-Blaschke

Pour un diamètre donné, la figure de largeur constante qui a la plus petite surface est le triangle de Reuleaux.

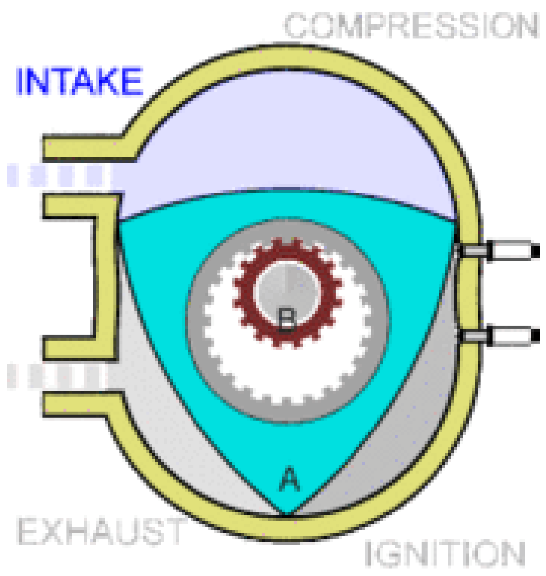


Ce qu'on peut faire d'autres…

Le triangle de Reuleaux peut remplacer un cercle, mais il a ses propres particularités, voici quelques utilités qu'on peut lui donner.

Moteur Wankel

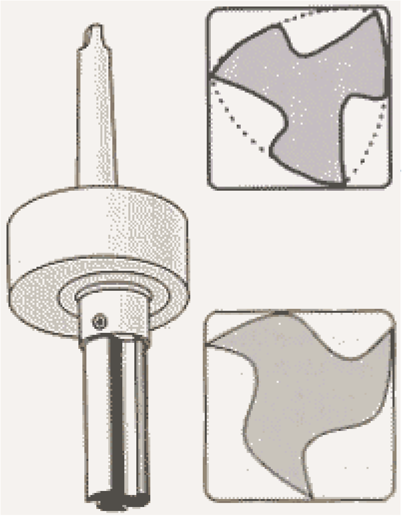
- C'est un moteur à piston rotatif à 4 temps.
- Diminue le frottement, le bruit et le nombre de pièces.
- Utilisé par Mazda RX.
- (Forte consommation)



http://fr.wikipedia.org/wiki/Moteur_Wankel

Et pour les trous,
peut-on faire des trous carrés ?

- En 1930, l'ingénieur britannique Harry Watts, inventa une fraise basée sur le triangle de Reuleaux permettant de faire des trous (presque) carrés.



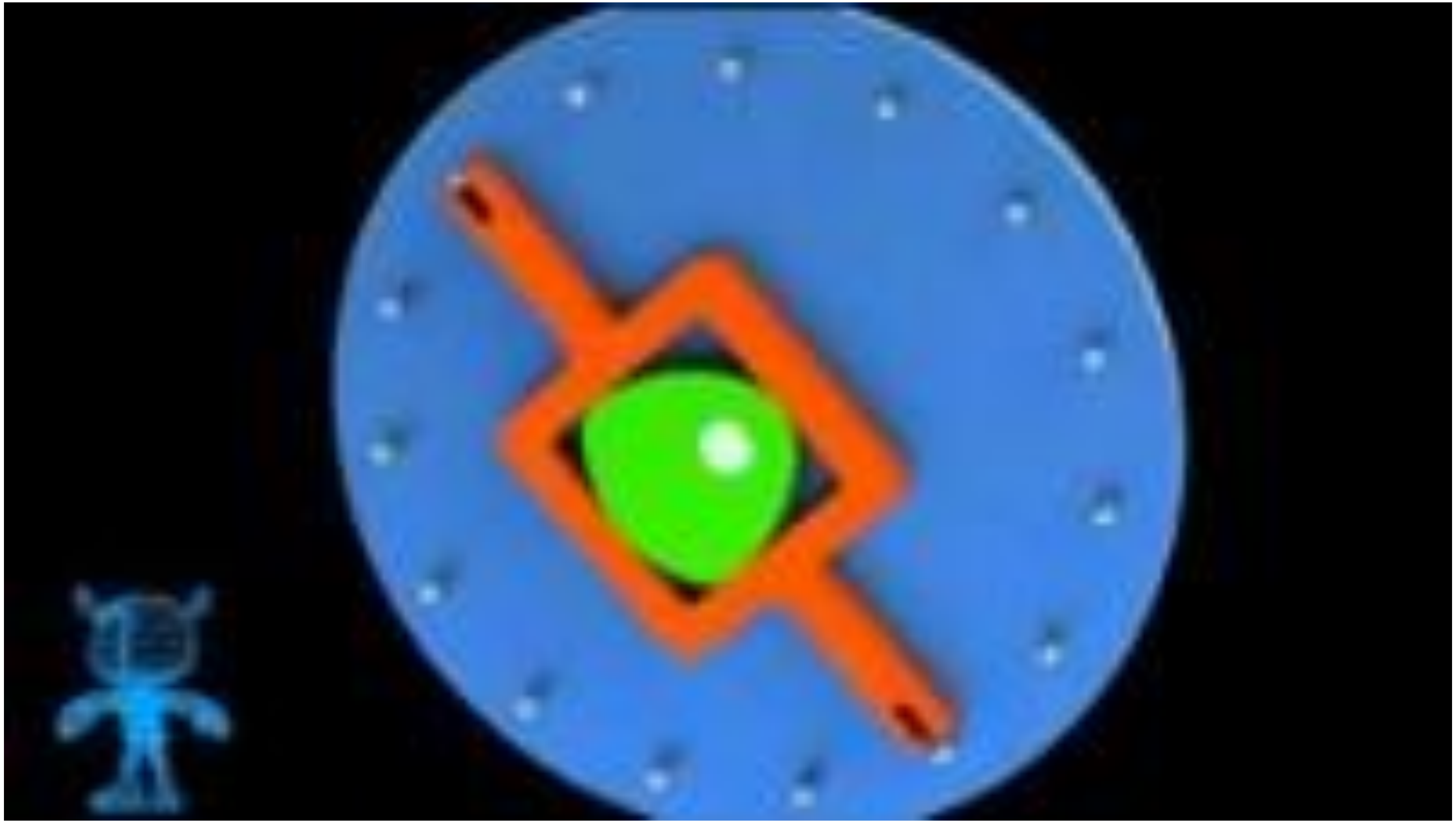
Source: http://www.encyclopedie-incomplete.com/?Trou-Carre

Projecteur de film

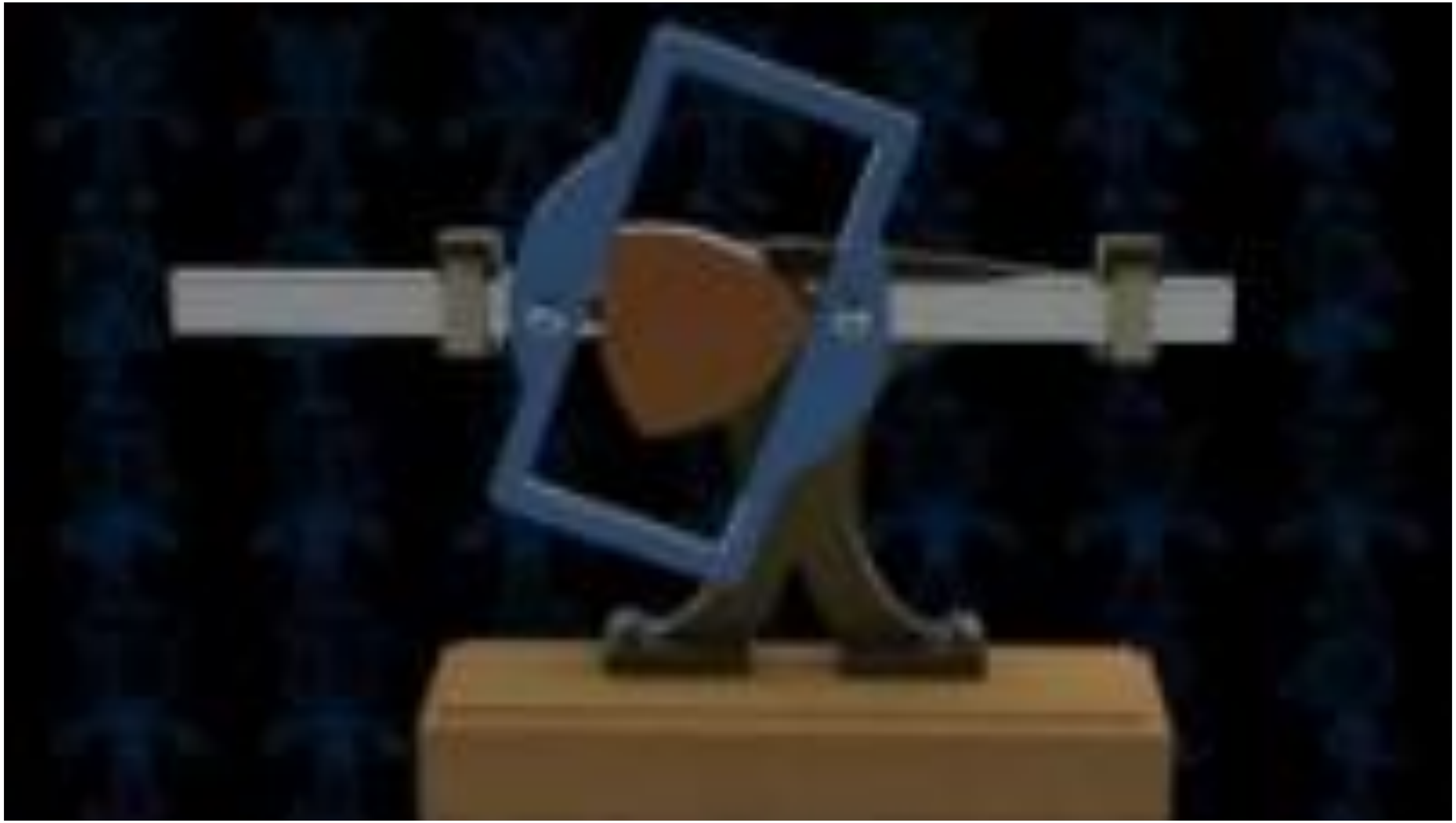
http://www.etudes.ru//ru/mov/mov001/

Autres mouvements

Autres mouvements

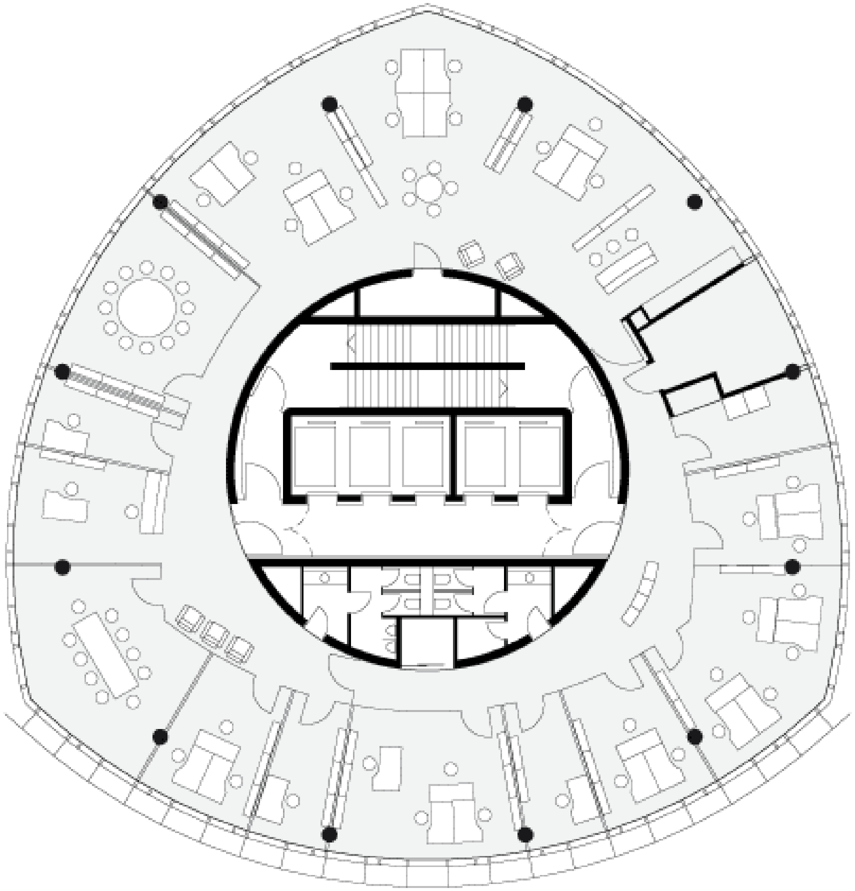


Autres mouvements



Et le vélo ?

Architecture: Tour à Cologne



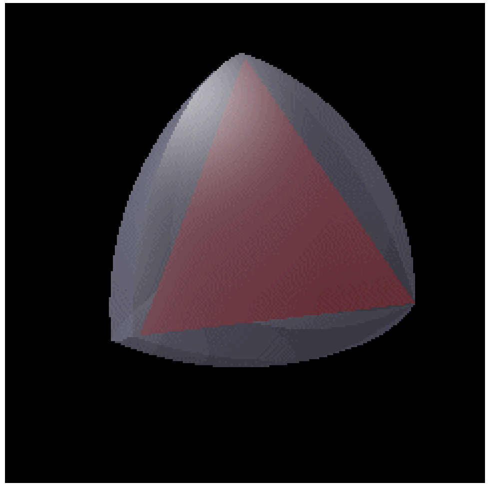
Généralisons en dimension 3.

Un **solide de largeur constante** est un solide convexe tel qu'il existe deux plans parallèles de distance fixe dont chacun est en contact avec la surface du solide, peu importe son orientation.

Reuleaux en dimension 3

Le **tétraèdre de Reuleaux** est un solide créé à partir d'un tétraèdre régulier dont chacun des sommets est le centre d'une section de la sphère passant par les 3 autres sommets.

Le tétraèdre de Reuleaux n'est pas un solide de largeur constante.

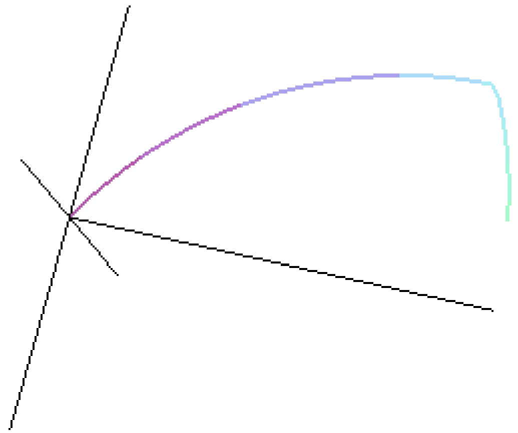


Source: http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:ReuleauxTetrahedron_Animation.gif

Y en a-t-il à part la sphère ?

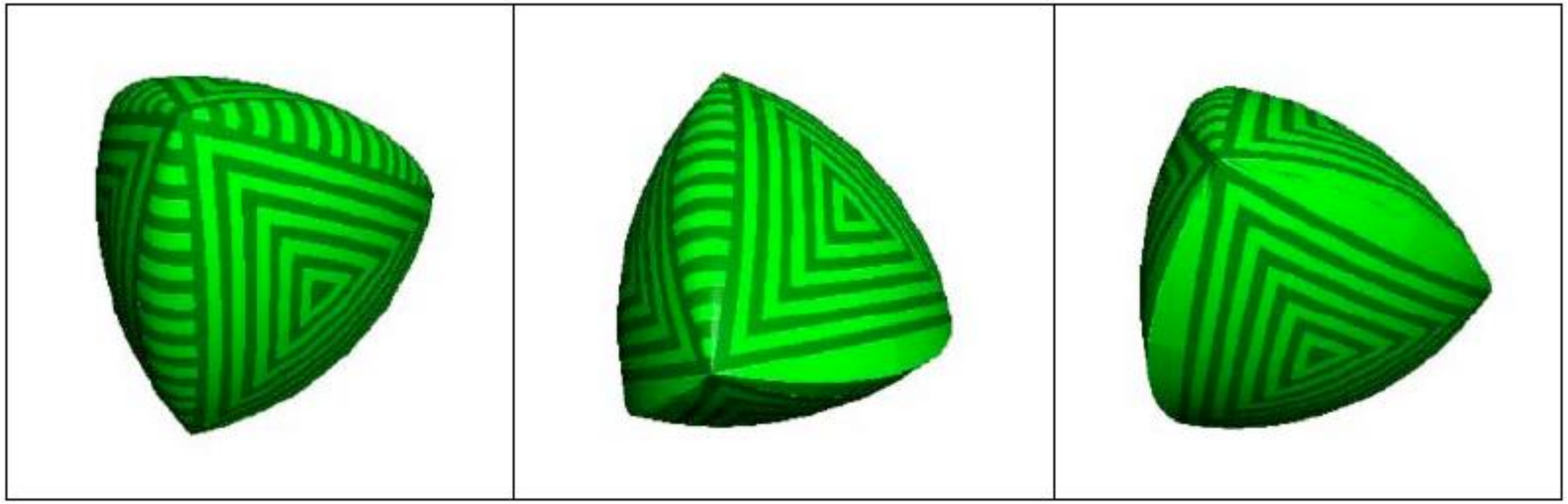
Théorème

- Un solide engendré par la rotation d'un polygone de Reuleaux sur un axe de symétrie est un solide de largeur constante.



Solides de Meissner

À partir d'un tétraèdre de Reuleaux, il est possible de faire des modifications pour le transformer en 2 solides de largeur constante : les solides de Meissner.

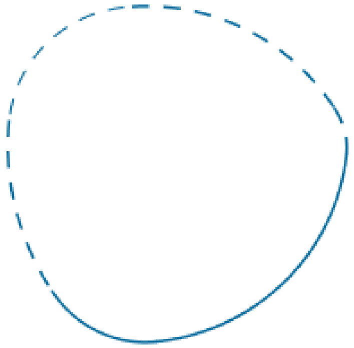


Source: http://www.swisseduc.ch/mathematik/material/gleichdick/index.html

Ce qu'il reste à faire…

Voici deux problèmes ouverts.

- À partir d'un arc de courbe donné, peut-on savoir s'il fait partie d'une figure à largeur constante?



- Est-ce que les solides de Meissner sont ceux qui ont le volume minimal pour un diamètre donné?

Source: http://www.swisseduc.ch/mathematik/material/gleichdick/index.html

Références

Bedou, Laurent, Au-delà du cercle, les pseudo-ronds, Découvertes No 360, Janvier-février 2009.

Cantat, Serge, *Le triangle de Reuleaux* http://images.math.cnrs.fr/Le-triangle-de-Reuleaux.html

Dubois, Jacques, *La notion de convexité, un aperçu de son rôle dans les mathématiques du XX*e *siècle*, Actes du 42e congrès de l'AMQ

Roux, Jean-Bernard, *Des trous carrés*, Chapitre 87 http://web.me.com/rouxjeanbernard/Site/AM/html/amch87.html