Club Math du Cégep de Sherbrooke

Combinatoire

Créé par Sylvain Bérubé le 25 septembre 2023

Théorie

Introduction

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui se concentre sur le dénombrement et l'étude des différentes façons de sélectionner, organiser ou combiner des éléments d'un ensemble, souvent en respectant certaines règles ou contraintes. Elle est largement utilisée pour résoudre des problèmes liés à la probabilité, à l'optimisation, à la statistique, et dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie pour analyser des arrangements et des combinaisons d'éléments.

Exemples

- Combien d'entiers pairs sont inférieurs à 800 mais supérieurs à 700 ? (49)
- Combien y a-t-il de carrés parfaits entre 99 et 1 000 001 ? (991)
- Combien d'entiers positifs plus petits que 100 sont des multiples de 3 mais pas de 5 ? (27)

Pour faciliter le dénombrement, différentes techniques peuvent être employées. C'est ce qu'on va explorer dans ce guide.

Principe d'addition

Le principe d'addition est une règle fondamentale qui permet de compter le nombre total de possibilités ou d'objets dans un ensemble en divisant le problème en plusieurs cas exclusifs et en additionnant les résultats de chaque cas. Ce principe est souvent utilisé lorsque vous avez deux cas mutuellement exclusifs et que vous souhaitez déterminer le nombre total d'objets ou de possibilités dans l'ensemble combiné.

En termes simples, voici comment fonctionne le principe de l'addition en analyse combinatoire :

1. Vous avez deux ensembles (ou cas) distincts qui ne se chevauchent pas.
2. Vous déterminez le nombre d'objets ou de possibilités dans le premier ensemble, que l'on notera A.
3. Vous déterminez le nombre d'objets ou de possibilités dans le deuxième ensemble, que l'on notera B.
4. Pour trouver le nombre total d'objets ou de possibilités dans l'ensemble combiné (A ou B), vous ajoutez simplement le nombre d'objets de l'ensemble A au nombre d'objets de l'ensemble B.

Mathématiquement, cela s'exprime comme suit : Total $= A + B$. À noter que ce résultat se générale a plus de 2 ensembles. Le principe de l'addition est souvent utilisé pour résoudre des problèmes de comptage où il y a plusieurs façons d'obtenir un résultat, mais ces façons sont mutuellement exclusives. En additionnant les résultats de chaque cas exclusif, vous obtenez le nombre total d'objets ou de possibilités dans l'ensemble combiné.

Exemple Vous allez au restaurant et vous avez assez d'argent pour acheter soit un breuvage, soit une entrée ou soit un dessert. Le restaurant a 8 choix de breuvage, 5 choix d'entrées et 4 choix de desserts. Combien de choix d'offrent à vous ? (17)

Principe de multiplication

Le principe de multiplication est une règle fondamentale qui s'applique lorsque vous avez plusieurs étapes ou décisions successives à prendre pour arriver à un résultat global. Voici comment il fonctionne en termes simples.

1. Pour la première étape, vous avez a choix possibles.

2. Pour la deuxième étape, indépendamment de ce que vous avez choisi à la première étape, vous avez b choix possibles.
3. Pour la troisième étape, indépendamment des choix précédents, vous avez c choix possibles.
4. Vous continuez ainsi pour toutes les étapes nécessaires.
5. Pour déterminer le nombre total de possibilités ou de résultats différents, vous multipliez simplement le nombre de choix possibles à chaque étape.

Mathématiquement, cela s'exprime comme suit : Total $= a \times \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \times \cdots$.

Le principe de multiplication est souvent utilisé pour résoudre des problèmes de comptage où plusieurs décisions ou étapes sont prises successivement, et le nombre total de résultats possibles est obtenu en multipliant les options disponibles à chaque étape.

Exemple Vous allez au restaurant et vous voulez commander un breuvage, une entrée et un dessert. Le restaurant a 8 choix de breuvage, 5 choix d'entrées et 4 choix de desserts. Combien de choix s'offrent à vous ? (160)

Exemples Combien y a-t-il de résultats possibles lorsqu'on tire une pièce à pile ou face ? Lorsqu'on en tire deux à pile ou face (en tenant compte de l'ordre des pièces) ? Lorsqu'on en tire dix à pile ou face ? (2, 4, 1024)

Exemples Combien y a-t-il de résultats possibles lorsqu'on lance un dé à six faces ? Lorsqu'on lance deux dés à six faces (en tenant compte de l'ordre des dés) ? Lorsqu'on lance deux pièces à pile ou face et deux dés à six faces ? (6, 36, 36 864)

Factorielle

Dans certains calculs de probabilités, on doit multiplier les entiers positifs de 1 à n. Lorsque cela se produit, il est possible d'utiliser une notation spéciale pour alléger les calculs et la démarche de résolution.

La **factorielle** d'un entier naturel n est le produit de tous les entiers positifs inférieurs ou égaux à n. Cette opération est notée avec un point d'exclamation, $n!$, et se lit « n factorielle » ou « factorielle de n ». Ainsi, la factorielle de n est

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$$

Par ailleurs, $0! = 1$ puisque par convention, le produit vide est égal à 1.

Ainsi,

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$10! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3\,628\,800$$

$$15! = 1\,307\,674\,368\,000$$

Permutation

Les permutations d'un ensemble d'éléments correspondent aux dispositions ordonnées de tous les éléments de cet ensemble. Pour un ensemble ayant n éléments, le nombre de permutations est

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!.$$

Exemple Combien d'entiers positifs différents peut-on former en réarrangeant les chiffres 2, 3, 4, 5 et 6 ? (120)

Exemple On pige au hasard, sans remise et en tenant compte de l'ordre, toutes les billes d'un sac contenant une bille rouge, une bille bleue, une bille jaune et une bille verte. Combien y a-t-il de résultats possibles ? (24)

Exemple Combien de « mots » différents de cinq lettres (permutation des cinq lettres) peuvent être formés en réorganisant les lettres du mot SUPER ? (120)

Exemple Combien de « mots » différents de cinq lettres (permutation des cinq lettres) peuvent être formés en réorganisant les lettres du mot ELEVE ? (20)

Exemple Combien de « mots » différents de onze lettres (permutation des onze lettres) peuvent être formés en réorganisant les lettres du mot MISSISSIPPI ? (34 650)

Exemple Combien de nombres pairs à cinq chiffres contiennent chacun des chiffres de 1 à 5 ? (48)

Arrangement

Les arrangements d'un ensemble d'éléments correspondent aux dispositions ordonnées de certains éléments de cet ensemble. Pour un ensemble ayant n éléments, le nombre d'arrangements de k éléments de cet ensemble est

$$A_n^k = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Exemple Cinq étudiants participent à une course. De combien de manières trois étudiants sur cinq peuvent-ils se classer 1er, 2^{e} et 3^{e} ? (60)

Combinaison

Les combinaisons d'un ensemble d'éléments correspondent aux dispositions non ordonnées de certains éléments de cet ensemble. Pour un ensemble ayant n éléments, le nombre de combinaisons de k éléments de cet ensemble est

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Exemple On pige au hasard, sans remise et sans tenir compte de l'ordre, 2 billes d'un sac contenant une bille rouge, une bille bleue, une bille jaune et une bille verte. Combien y a-t-il de résultats possibles? (6)

Exemple Une étagère contient 20 livres. Combien d'ensembles de trois livres différents peut-on former ? (1 140)

Exemple Anna et Benjamin sont amis et font partie de la même équipe de basket-ball. L'équipe compte huit joueurs. Combien d'équipes de départ de cinq joueurs comprennent Anna, Benjamin ou les deux ? (50)

Exemple L'oncle Henry a dix pièces de un dollar à distribuer à ses cinq plus jeunes nièces et neveux. Combien y a-t-il de façons de distribuer son argent ? (1 001)

Exercices

1. Sergueï participe à un tirage lors duquel il court la chance de remporter une planche à roulettes. Le tirage consiste à piger 3 boules dans un bocal opaque qui contient des boules numérotées de 1 à 10. Après avoir pigé une boule, il la met de côté, puis en pige une autre. Pour gagner le tirage, Sergueï doit piger les boules 3, 6 et 9, dans aucun ordre en particulier. Combien de résultats possibles peut-il y avoir lors de ce tirage ?

2. Un cadenas à roulette contient tous les nombres de 0 à 39. Pour créer un code de sécurité, le propriétaire du cadenas doit choisir une séquence précise de 3 nombres qui peuvent se répéter. Combien de codes de sécurité est-il possible de créer avec ce type de cadenas ?

3. Au début d'une partie de poker fermé, un joueur reçoit 5 cartes au hasard, parmi les 52 cartes du jeu. Ces 5 cartes forment ce qu'on appelle la main. Combien de mains différentes est-il possible d'obtenir dans ce jeu ?

4. Myriam crée une banque de 20 chansons pour son groupe de danse en ligne du mercredi soir. Pour s'assurer de ne pas réécouter la même chanson plus d'une fois lors des soirées dansantes, Myriam aimerait que le lecteur de musique sélectionne aléatoirement 6 chansons différentes parmi la banque. Combien de listes de chansons différentes seront ainsi créées si l'ordre des chansons est important pour Myriam ?

5. AHSME (2001-12) Combien d'entiers positifs ne dépassant pas 2001 sont multiples de 3 ou de 4 mais pas de 5 ?

6. AHSME (2001-16) Une araignée a une chaussette et un soulier pour chacune de ses huit pattes. Dans combien d'ordres différents l'araignée peut-elle mettre ses chaussettes et ses souliers, considérant que, sur chaque patte, la chaussette doit être mise avant le soulier ?

7. AHSME (2003-20) Combien d'arrangements de 15 lettres contenant 5 lettres A, 5 lettres B et 5 lettres C n'ont pas de A dans les cinq premières lettres, pas de B dans les 5 lettres suivantes et pas de C dans les 5 dernières lettres ?

8. AIME (2002-9) Soit S l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Soit n le nombre d'ensembles de deux sous-ensembles non vides disjoints de S. (On nomme ensembles disjoints des ensembles qui n'ont aucun élément en commun.) Déterminez le reste de la division de n par 1000.

9. Il existe combien de façons différentes de distribuer les éléments de $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ dans k boîtes non identifiées, si a_1 des boîtes contiennent un seul élément, a_2 en contiennent deux, ainsi de suite, et qu'aucune boîte n'est vide ? Supposez que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = k$ et $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n$.

10. Combien de nombres entiers à dix chiffres utilisent uniquement les chiffres 0, 1 et 2 ?

11. Soit $x = 0{,}123456789010111213 \dots 997998999$, où les décimales sont obtenues en écrivant les entiers 1 à 999 dans l'ordre. Trouvez la 1983e décimale.

12. Déterminer le nombre de façons de choisir cinq nombres parmi les dix-huit premiers entiers positifs de telle sorte que l'écart entre chaque paire de nombres choisis diffère d'au moins 2.

13. Un numéro de téléphone ayant 7 chiffres $d_1d_2d_3$-$d_4d_5d_6d_7$ est dit mémorable si la série $d_1d_2d_3$ est la même que $d_4d_5d_6$ ou $d_5d_6d_7$ (ou les deux). En assumant que chaque d_i peut être n'importe lequel des dix chiffres décimaux $0, 1, 2, \dots, 9$, trouvez le nombre de numéros de téléphone mémorables.

14. De combien de façons peut-on ordonner les nombres $21, 31, 41, 51, 61, 71, 81$ de telle sorte que la somme de 4 nombres consécutifs soit divisible par 3 ?

15. La suite croissante $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$ est constituée de tous les entiers positifs qui sont des puissances de 3 ou des sommes de puissances de 3 distinctes. Trouvez le 100e terme de cette suite.

Références

Factorielle. *Wikipédia, l'encyclopédie libre*. Page consultée le 25 septembre 2023.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Factorielle

J. Batterson, *Art of Problem Solving. Competition Math for Middle School*, 978-1-934124-20-8.
https://artofproblemsolving.com/store/book/competition-math

Les permutations, les arrangements et les combinaisons. Alloprof. Page consultée le 25 septembre 2023.
https://www.alloprof.qc.ca/fr/eleves/bv/mathematiques/les-permutations-les-arrangements-et-les-combinai-m1346

Titu Andreescu et Zuming Feng, 102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO Team
https://rainymathboy.files.wordpress.com/2011/01/102-combinatorial-problems.pdf