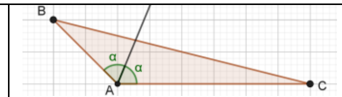
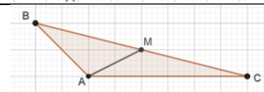
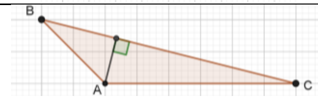
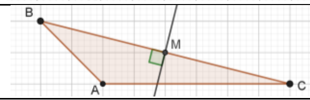
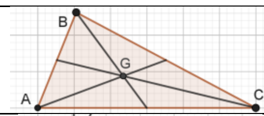
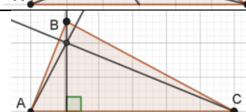
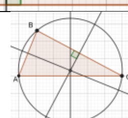
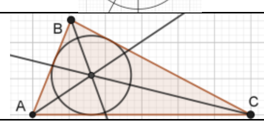
Club Math du Cégep de Sherbrooke

# La géométrie du triangle

Dans un triangle $ABC$. Soit $M$ le milieu de $BC$.

| | |
|---|---|
| La **bissectrice** de $A$ est une demi-droite qui coupe l'angle $A$ en 2. |  |
| La **médiane** du sommet $A$ est le segment entre $A$ et $M$. |  |
| La **hauteur** issue de $A$ est le segment partant de $A$ et finissant sur la droite $BC$ à angle droit. |  |
| La **médiatrice** de $BC$ est la droite perpendiculaire à $BC$ passant par $M$. |  |

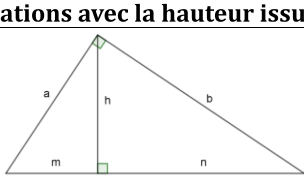
| | |
|---|---|
| Les trois médianes se croisent en un seul point (au deux tiers des segments) au centre de gravité du triangle. |  |
| Les trois hauteurs se croisent en un seul point, l'orthocentre. |  |
| Les trois médiatrices se croisent en un seul point, au centre du **cercle circonscrit**. |  |
| Les 3 bissectrices se croisent en un seul point, le centre du **cercle inscrit**. |  |

**Formule d'Héron**

Soit un triangle dont les mesures des trois côtés sont $a$, $b$, $c$ et posons $d$ comme le demi-diamètre est $d = \frac{a+b+c}{2}$. Alors l'aire du triangle est

$$A = \sqrt{d(d-a)(d-b)(d-c)}$$

**Relations avec la hauteur issue de l'angle droit dans un triangle rectangle**

| | |
|---|---|
|  | $h^2 = mn$<br>$a^2 = cm$<br>$b^2 = cn$<br>$ch = ab$ |

## ASHME ou AMC12

**(2004B-6)** L'aéroport international de Minneapolis-St-Paul est situé à 8 milles au sud-ouest du centre-ville de St-Paul et à 10 milles au sud-est du centre-ville de Minneapolis. Lequel des nombres ci-dessous est le plus près du nombre de milles entre le centre-ville de St-Paul et le centre-ville de Minneapolis ?

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

**(2021B-8)** Le produit des longueurs des deux côtés congruents d'un triangle isocèle obtus est égal au produit de la base et deux fois la hauteur du triangle à la base. Quelle est la mesure, en degrés, de l'angle de sommet de ce triangle ?

(A) 105 (B) 120 (C) 135 (D) 150 (E) 165

**(2021B-9)** Quelle est la somme de toutes les valeurs possibles de $t$ entre 0 et 360 telles que ces coordonnées des sommets forment un triangle isocèle?

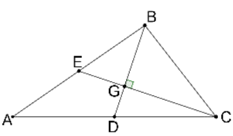
$(\cos 40°, \sin 40°)$, $(\cos 60°, \sin 60°)$ et $(\cos t°, \sin t°)$

(A) 100 (B) 150 (C) 330 (D) 360 (E) 380

**(2015A-12)** Les triangles isocèles $T$ et $T'$ ne sont pas congruents, mais sont de même aire et de même périmètre. Les côtés de $T$ ont des longueur de 5, 5, et 8, tandis que ceux de T' ont des longueur de $a$, $a$, et $b$. Lequel de ces nombres suivants est le plus proche de $b$?

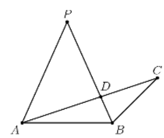
(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

**(1997-15)** Les médianes $BD$ et $CE$ du triangle $ABC$ sont perpendiculaires. Si $BD$ = 8 et $CE$ = 12, alors l'aire du triangle $ABC$ est




(A) 24 (B) 32 (C) 48 (D) 64 (E) 96

**(1997-26)** On présente dans le même plan le triangle $ABC$ et le point $P$. Le point $P$ est équidistant de $A$ et de $B$, l'angle $APB$ est le double de l'angle $ACB$ et $AC$ rencontre $BP$ au point $D$. Si $PB = 3$ et $PD = 2$, alors $AD \times CD$ est égal à




(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

**(1998-28)** Dans le triangle $ABC$, l'angle $C$ est un angle droit et $CB > CA$. On situe le point $D$ sur $\overline{BC}$ de sorte que l'angle $CAD$ soit le double de l'angle $DAB$. Si $\frac{AC}{AD} = \frac{2}{3}$, alors $\frac{CD}{BD} = \frac{m}{n}$, où $m$ et $n$ sont des entiers positifs relativement premiers. Trouvez $m + n$.

(A) 10 (B) 14 (C) 18 (D) 22 (E) 26

## Défi canadien

**(2002-A-1)** Dans le triangle $PQR$, $F$ est un point sur $RQ$ de manière que $PF$ soit perpendiculaire à $QR$. Si $PR = 13$, $RF = 5$ et $FQ = 9$, quel est le périmètre du triangle $PQR$?

**(2002-A-3)** Un pentagone régulier est un polygone à 5 côtés dont tous les angles sont congrus et tous les côtés sont congrus. Dans le diagramme, $ENTRA$ est un pentagone régulier, $MIT$ est un triangle équilatéral et $MONT$ est un carré. Détermine la mesure de l'angle $TIR$.

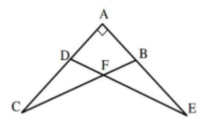
**(2004-A-8)** Une feuille de papier de forme rectangulaire, $ABCD$, est telle que $AD = 1$ et $AB = r$, $1 < r < 2$. La feuille est pliée au sommet $A$ de manière que le côté $AD$ soit aligné sur le côté $AB$. Sans déplier, la feuille est pliée au sommet $B$ de manière que le côté $CB$ soit aligné sur le côté $AB$. La feuille forme alors un triangle. Une partie de ce triangle a une épaisseur de quatre feuilles. Quelle est l'aire de cette région en fonction de $r$?

## AMQ

**(2011-4) Le triangle de Pascale.** Pascale a un objet triangulaire (triangle scalène $ABC$) en plastique translucide d'une épaisseur uniforme de 5 mm et contenant un liquide coloré. Lorsqu'elle place la base $AB$ de 36 cm à l'horizontale, le liquide atteint une hauteur de 3 cm. Lorsqu'elle place la base $BC$ de cet objet à l'horizontale, le liquide atteint une hauteur égale au 1/4 de la hauteur issue du sommet $A$ du triangle. En plaçant l'objet triangulaire sur la base $CA$, la hauteur du liquide est de 4 cm. Quelle est la longueur de la base $CA$ ?

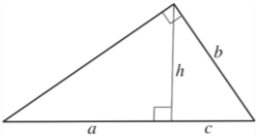
## AQJM

**(34e QF 13) La condition d'égalité.** Les triangles $ABC$ et $ADE$ sont rectangles en $A$ et isométriques. L'aire du quadrilatère $ADFB$ est égale à la somme des aires des triangles $CFD$ et $BFE$.



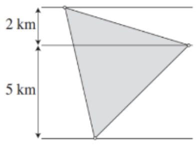

**Quel est le rapport de la longueur $AB$ sur la longueur $AC$ ?**
On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.
Note : La figure n'est pas à l'échelle.

**(35e QF 14) Le champ de Bruno** Bruno possède un champ ayant la forme d'un triangle rectangle. La hauteur h issue du sommet de l'angle droit partage l'hypoténuse en deux segments de longueurs a et c telles que $a = b + c$.




**Si $c$ = 10 m, quelle est la longueur $a$ ?**
On arrondira la réponse au mètre le plus proche.

**(34e QF 17) La forêt triangulaire** Cette forêt a la forme d'un triangle équilatéral. Trois routes parallèles passent respectivement par chacun de ses trois sommets. Deux de ces routes sont espacées de 2 km et la troisième est espacée de 5 km et de 7 km des deux premières.




**Quelle est la longueur du côté de la forêt, en km?**
Si besoin est, on prendra 1,414 pour $\sqrt{2}$ ; 1,732 pour $\sqrt{3}$; 2,236 pour $\sqrt{5}$ ; 3,6056 pour $\sqrt{13}$ et on arrondira la réponse au mètre le plus proche.

# Réponses

## AMC12

**(2004B-6)** (A) 13, **(2021B-8)** (D) 150, **(2021B-9)** (E) 380,

**(2015A-12)** (A) 3, **(1997-15)** (D) 64, **(1997-26)** (A) 5,

**(1998-28)** (B) 14

## Défi canadien

**(2002-A-1)** 42. **(2002-A-3)** 39° **(2004-A-8)** $\mathbf{1 - r + \frac{r^2}{4} = \frac{1}{4}(2 - r)^2}$

## AMQ

**(2011-4) 27 cm**

## AQJM

**(34e F 13)** 1/2**. (35e,QF 14.)** 30. **(34e F 17)** 7,211.

## Références

AMQ : https://www.amq.math.ca/concours/
Défi ouvert Canadien :
https://fadjarp3g.files.wordpress.com/2011/04/2002-sol.pdf
https://fadjarp3g.files.wordpress.com/2011/04/2004-sol.pdf

AMC12 ou ASHME : https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php

Rappels sur les polynômes et sur la factorisation (CAM-TIC):
https://mathematic.moodle.decclic.qc.ca/mod/book/view.php?id=1266
https://mathematic.moodle.decclic.qc.ca/mod/book/view.php?id=1233