Club Math du Cégep de Sherbrooke

Les polynômes

par An!k Trahan pour le 25 septembre 2023

Théorie

Un **polynôme** à une variable est une expression de la forme $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $a_i \in \mathbb{R}$. Les a_i sont les **coefficients**.
Exemple : $7x^2 - 3$
Contre-exemples : $5x + x^{-2}$, $3x + x^{1/2}$, $\frac{7x-3}{2x}$, $\cos^2 x + 2\cos x + 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$

Le **degré** d'un polynôme à une variable est le plus grand exposant à la variable dont le coefficient n'est pas nul.

Un **polynôme unitaire** est un polynôme à une variable dont le coefficient du terme avec le plus grand degré est 1.
Exemple : $x^3 - 7x + 11$ et $7x + x^4 - 5$ sont des polynômes unitaires.

Un polynôme de degré 2 est appelé un polynôme **quadratique** et un polynôme de degré 3 est un polynôme **cubique**.

Si $p(x)$ est un polynôme quadratique, alors la courbe $y = p(x)$ est une **parabole**. On peut exprimer $p(x)$ sous la forme $a(x-h)^2 + k$ tel que le sommet de la parabole est le point (h, k).

r est une **racine** d'un polynôme $p(x)$ si $p(r) = 0$. On dit aussi que r est un **zéro** du polynôme.

Théorèmes

1) r est une racine du polynôme $p(x)$ si et seulement s'il existe un polynôme $q(x)$ tel que $(x-r)q(x) = p(x)$.
2) Soit deux polynômes $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ et $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.
   $p(x) = q(x)$ si et seulement si $a_n = b_n, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$.
3) Tout polynôme $p(x)$ à coefficients réels peut se factoriser en un produit de polynômes de degré 1 ou de degré 2.

Les polynômes peuvent être à plus d'une variable.
Exemples : $7z^2 - 3x$, $3x^2y - 2z$, $7x^3y - xy^3$

Problèmes

ASHME ou AMC12

(1997-3) Si x, y et z sont des nombres réels tels que $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=0$ alors $x+y+z=$

(A) -12 (B) 0 (C) 8 (D) 12 (E) 50

(1998-14) Une parabole a pour sommet $(4\,;\,-5)$ et rencontre l'axe des x en deux abscisses, l'une positive et l'autre négative. Si cette parabole est le graphe de $y=ax^2+bx+c$, précisez ce qui, de a, b et c doit être positif.

(A) a seulement (B) b seulement (C) c seulement
(D) a et b seulement (E) aucun

(**1983- 18**) Soit f une fonction polynomiale telle que pour tout réel x, $f(x^2+1)=x^4+5x^2+3$, alors pour tout réel x, $f(x^2-1)$ vaut

(A) x^4+5x^2+1 (B) x^4+x^2-3 (C) x^4-5x^2+1
(D) x^4+x^2+3 (E) aucune de ces réponses

(1996-18) Un cercle de rayon 2 a son centre en (2, 0). Un cercle de rayon 1 a son centre en (5, 0). Une droite est tangente aux deux cercles en des points du premier quadrant. Lequel des nombres suivants est le plus proche de l'ordonnée à l'origine de la droite ?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{8}{3}$ (C) $1+\sqrt{3}$ (D) $2\sqrt{2}$ (E) 3

(1996-20) Dans le plan xy, quelle est la longueur du plus petit parcours de (0, 0) à (12, 16) qui n'entre pas à l'intérieur du cercle d'équation $(x-6)^2+(y-8)^2=25$?

(A) $10\sqrt{3}$ (B) $10\sqrt{5}$ (C) $10\sqrt{3}+\frac{5\pi}{3}$ (D) $40\frac{\sqrt{3}}{3}$ (E) $10+5\pi$

(1998-23) Les graphes de $x^2+y^2=4+12x+6y$ et $x^2+y^2=k+4x+12y$ se rencontrent quand k vérifie $a\le k\le b$ et pour aucune autre valeur de k. Trouvez $b-a$.

(A) 5 (B) 68 (C) 104 (D) 140 (E) 144

(1987-15) Si (x,y) est une solution du système $xy=6$ et $x^2y+xy^2+x+y=63$, déterminez x^2+y^2

(A) 13 (B) $\frac{1173}{322}$ (C) 55 (D) 69 (E) 81

(B2004-23) Le polynôme $x^3-2004x^2+mx+n$ a des coefficients entiers et 3 zéros positifs distincts. Exactement un de ces zéros est un entier et il est la somme des deux autres. Combiens de valeurs de n sont possibles?

(A) 250 000 (B) 250 250 (C) 250 500 (D) 250 750 (E) 251 000

https://youtu.be/1uhLx89VWK8?si=gQDOwusIqPbH7Z2U

(B2010-23) Des polynômes quadratiques unitaires $P(x)$ et $Q(x)$ ont la propriété que $P\big(Q(x)\big)$ a des zéros en $x=-23,-21,-17$ et -15 et $Q(P(x))$ a des zéros en $x=-59,-57,-51$ et -49. Quelle est la somme des valeurs minimales de $P(x)$ et $Q(x)$.

(A) -100 (B) -82 (C) -73 (D) -64 (E) 0

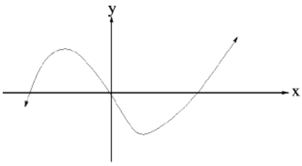
https://youtu.be/cQy7QnNGBQw?si=7iXF58BeGoiHZuNA&t=872

Défi canadien

(1996 A1) Les racines de l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$ sont aussi des racines de l'équation $2x^3 + 9x^2 - 6x - 5 = 0$. Quelle est la troisième racine de la deuxième équation ?

(2004 A1) Si $x + 2y = 84 = 2x + y$, quelle est la valeur de $x + y$?

(1999 A2) Le diagramme illustre une *esquisse* de la représentation graphique de $y = (2x + 4)(x^2 - 3x)$. Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $y \geq 0$?



(2002 A2) Si $x + y = 4$ et $xy = -12$, quelle est la valeur de $x^2 + 5xy + y^2$?

(2006 A2) Soit $f(2x + 1) = (x - 12)(x + 13)$. Quelle est la valeur de $f(31)$?

(2005 A3) Si $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + x - 2)(x - 4) - (x + 2)(x^2 - 5x + 4)$ pour toutes les valeurs de x, quelle est la valeur de l'expression $a + b + c + d$?

(1996 A8) Déterminez tous les couples des nombres entiers (x, y) qui vérifient l'équation :

$$6x^2 - 3xy - 13x + 5y = -11$$

(2003 B4) L'équation algébrique $x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$ admet trois racines réelles a, b et c.
(a) Déterminer la valeur de $a^5 + b^5 + c^5$.

AMQ

(2009-3) Soit $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, où p, q et r sont des entiers. Montrer que si $f(0)$ et $f(1)$ sont tous deux impairs, alors la fonction ne peut pas posséder trois zéros entiers.

(2010-2) On dit que $q(x)$ est le polynôme récursif de $p(x)$ si $q(x) = p\big(p(x)\big)$. Trouver tous les polynômes possibles de la forme $q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 13$ qui soient le polynôme récursif d'un polynôme $p(x)$ à coefficients entiers.

(2012-4) Olivier s'amuse à trouver des polynômes $p(x)$, toujours à coefficients entiers, dont les racines (les zéros) sont des racines comme $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$. Facile !
Question d'augmenter le défi, il décide ensuite d'en trouver un dont $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ serait une racine (c'est-à-dire que $p\big(\sqrt{2} + \sqrt{3}\big) = 0$). Il finit par en obtenir un qui, à sa grande surprise, est relativement simple. Trouver quel est ce polynôme à coefficients entiers.

(2013-6) Un polynôme de l'année est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2013, dont le coefficient du terme avec le plus haut degré est 1 et dont tous les zéros sont entiers. Combien y a-t-il de polynômes de l'année dont le produit des zéros (distincts ou non) est 2013.

Réponses

AMC12

(1997-3) (D) 12

(**1983- 18**) (B) $x^4 + x^2 - 3$

(1996-20) (C) $10\sqrt{3} + \frac{5\pi}{3}$

(1987-15) (D) 69

(B2010-23) (A) -100

(1998-14) (A) a seulement

(1996-18) (D) $2\sqrt{2}$

(1998-23) (D) 140

(B2004-23) (C) 250 500

Défi canadien

(1996 A1) $-\frac{1}{2}$

1999 A2 $[-2; 0] \cup [3, \infty[$

2006 A2 84

1996 A8 $(1, -2), (2,9)$

(2004 A1) 56

2002 A2 -20

2005 A3 0

2003 B4a 3281

AMQ

(2009-3) Si la fonction possédait trois zéros entiers elle se décomposerait en : $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$. Si $f(0) = -abc$ est impair, alors a, b et c doivent tous les trois être impairs.
Alors $f(1) = (1 - a)(1 - b)(1 - c)$ est le produit de trois nombres pairs, donc pair. Cela vient en contradiction avec le fait que $f(1)$ soit impair ce qui signifie que l'hypothèse initiale qu'il y a trois zéros entiers est fausse.

(2010-2) $q(x) = x^4 + 22x^3 + 134x^2 + 143x + 13$, $q(x) = x^4 - 26x^3 + 182x^2 - 169x + 13$, $q(x) = x^4 - 26x^3 + 154x^2 + 195x + 13$, $q(x) = x^4 + 22x^3 + 106x^2 - 165x + 13$.

(2012-4) $p(x) = x^4 - 10x^2 + 1$

(2013-6) 22 269 823.

Références

AMQ : https://www.amq.math.ca/concours/

Défi ouvert Canadien :
https://fadjarp3g.files.wordpress.com/2011/04/2003-sol.pdf

AMC12 ou ASHME : https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php

Rappels sur les polynômes et sur la factorisation (CAM-TIC):
https://mathematic.moodle.decclic.qc.ca/mod/book/view.php?id=1266
https://mathematic.moodle.decclic.qc.ca/mod/book/view.php?id=1233

Solution sur YouTube : https://www.youtube.com/@CanadaMath