Club Math du Cégep de Sherbrooke

Suites arithmétiques et géométriques

Créé par Sylvain Bérubé le 8 septembre 2023

Théorie

Suites

Une **suite** est une liste ordonnée de termes. Par exemple, 1, 3, 5, 7, 9 est une suite finie de cinq termes ayant une différence commune de 2. Si une suite est infinie, nous indiquons généralement qu'elle se poursuit à l'infini par des points de suspension. Ainsi, 4, 7, 10, 13, … est une suite infinie dont la différence commune est 3.

On note une suite de la façon suivante : $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$. Le premier terme de cette suite est a_1, le deuxième terme est a_2, et ainsi de suite jusqu'au $n^{\text{ième}}$ terme a_n.

Suites arithmétiques

Une suite est appelée **suite arithmétique** si la différence entre les termes consécutifs est toujours la même. Cette différence est nommée la raison arithmétique. La formule permettant de définir explicitement le $n^{\text{ième}}$ terme a_n d'une suite arithmétique commençant par a_1 et ayant d pour raison arithmétique est

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d.$$

Note : Comme pour la plupart des formules, celle présentée ci-dessus n'est utile que si vous la comprenez. Cherchez à comprendre comment elle fonctionne plutôt que d'essayer de la mémoriser.

Il existe plusieurs autres propriétés des suites arithmétiques qui peuvent s'avérer utiles pour résoudre des problèmes.

Si l'on cherche la **raison arithmétique** d'une suite arithmétique à partir de deux termes a_i et a_j, on soustrait a_i de a_j pour trouver la différence totale, puis on soustrait i de j pour déterminer combien de fois la raison arithmétique a été ajoutée. Ainsi, la raison arithmétique d d'une suite est

$$d = \frac{a_j - a_i}{j - i},$$

ce qui n'est pas sans rappeler la formule permettant de calculer la pente d'une droite.

La **médiane** et la **moyenne** d'une suite arithmétique finie sont égales et valent la moyenne du premier et du dernier terme de la suite. Ainsi, si la suite comprend n termes, alors

$$\text{Moyenne} = \text{Médiane} = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{a_1 + (a_1 + (n-1) \cdot d)}{2} = a_1 + d \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right).$$

Somme d'une suite arithmétique finie

Considérons la somme des 100 premiers entiers positifs :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100.$$

Avant de prendre votre calculatrice et de commencer à pitonner, considérez la moyenne des 100 premiers entiers :

$$\text{Moyenne} = \frac{1 + 100}{2} = 50{,}5.$$

Puisqu'on sait qu'il y a 100 termes, alors la somme des 100 premiers termes est 100 fois leur moyenne :

$$1 + \cdots + 100 = 100 \cdot \left(\frac{1 + 100}{2}\right) = 100 \cdot 50{,}5 = 5\ 050.$$

Il en va de même pour toute suite arithmétique finie. Pour trouver la somme des termes, il faut trouver la moyenne des termes et la multiplier par le nombre de termes :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n \cdot \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right).$$

Suites géométriques

Une **suite géométrique** est une suite dont les termes consécutifs forment un rapport commun. Ce rapport commun est nommé la raison géométrique. Par exemple, $6, 12, 24, 48, \ldots$ est une suite géométrique infinie dont la raison géométrique est $12/6 = 2$.

Pour une suite géométrique infinie dont le premier terme est a et dont la raison géométrique est r, les termes sont

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

La formule du $n^{\text{ième}}$ terme a_n d'une suite géométrique commençant par a avec r comme raison géométrique est

$$a_n = ar^{n-1}.$$

La médiane d'une suite géométrique finie de nombres positifs est appelée **moyenne géométrique**. La moyenne géométrique de deux nombres a et b est la racine carrée de leur produit, soit $\sqrt{ab}$.

Par exemple, dans la suite géométrique a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, la médiane (évidemment ar^2 ici) peut être trouvée par

$$\sqrt{a \cdot ar^4} = ar^2.$$

Somme d'une suite géométrique et séries géométriques

Voici comment calculer la somme des termes de la suite géométrique finie $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots, ar^{n-1}$. D'abord, on pose

$$x = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$

Ensuite, on multiplie cette équation par la raison géométrique r pour obtenir

$$rx = ar + ar^2 + ar^3 \ldots + ar^n.$$

Finalement, on soustrait cette seconde équation de la première puis on isole x, ce qui donne

$$x - rx = a - ar^n \Longrightarrow x = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

La somme des termes d'une suite géométrique infinie s'appelle une **série géométrique**. Si on a la suite géométrique infinie $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ avec $|r| < 1$, alors le terme r^n de l'équation précédente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi, la série géométrique vaut

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots = \frac{a}{1 - r}.$$

Note : Comme d'habitude, ne mémorisez pas cette formule tant que vous ne pouvez pas faire les calculs sans elle.

Exercices

1. Trouvez la somme des 1 000 premiers entiers impairs positifs.

2. Le 5e terme d'une suite arithmétique est 18 et le 9e terme est 24. Quel est le 99e terme ?

3. La somme des trois premiers termes d'une suite arithmétique est 20 et la somme des trois termes suivants and 25. Quel est le premier terme de cette suite ?

4. Quelle est la différence positive entre le 5e terme de la suite géométrique $16, 24, \ldots$ et le 5e terme de la suite arithmétique $16, 24, \ldots$?

5. Combien de suites géométriques de deux ou plusieurs entiers positifs commencent par 1 et se terminent par 1 024 ?

6. Flora a compté le nombre de taches de rousseur qu'elle a chaque année depuis ses 7 ans, alors qu'elle n'avait que 5 taches de rousseur. Aujourd'hui, elle a 17 ans et 245 taches de rousseur. Si le nombre de taches de rousseur qu'elle a peut être approximé par une suite géométrique, combien de taches de rousseur avait-elle le jour de son 12e anniversaire ?

7. Trouvez le périmètre du plus petit triangle dont les longueurs entières des côtés forment une suite géométrique dont le rapport commun r n'est pas égal à 1.

8. Calculez

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1\,024}.$$

9. Calculez

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots.$$

10. Trouvez la somme de

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\frac{16}{625}+\cdots.$$

11. Quelle est la somme des multiples de 7 ou de 11 qui sont inférieurs à 1 000 ?

12. Soit a et b deux nombres strictement positifs tels que $a, b, a+b, ab$ forment, dans cet ordre, quatre termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminer a.

13. Soit a, b, c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique. Déterminer la valeur de x, sachant que

$$(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0.$$

14. Soit $x, 4, y$ trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de manière que $x, 3, y$ soient trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Déterminez la valeur de

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

15. Trois nombres distincts, dont le produit est égal à 125, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Ils sont aussi les 1^er^, 3^e^ et 6^e^ termes d'une suite arithmétique. Déterminez ces nombres.

16. Déterminez quatre entiers a, b, c, d qui vérifient les conditions suivantes :

— $b + c = 30$,
— $a + d = 35$,
— Les nombres a, b, c, d sont en ordre croissant et ils forment une suite géométrique,
— La somme des carrés des quatre entiers est égale à 1 261.

17. La somme de 25 entiers consécutifs est égale à 500. Déterminez le plus petit des 25 entiers.

18. Combien y a-t-il de termes dans la suite arithmétique $-1994, -1992, -1990, \ldots, 1992, 1994$?

19. On considère la suite arithmétique $7, 14, 21, \ldots$. Combien y a-t-il de termes de la suite qui sont entre 40 et 28 001 ?

20. On considère une suite arithmétique S dont les termes sont $t_1, t_2, t_3, \ldots$. De plus, $t_1 = a$ et la raison arithmétique est égale à d. Les termes t_5, t_9, t_{16} forment une suite géométrique dont la raison géométrique est égale à r. Démontrer que la suite S contient une infinité de suites géométriques de trois termes ayant toutes la même raison géométrique r.

21. Soit une suite arithmétique dont le $n^{\text{ième}}$ terme est défini par $t_n = 555 - 7n$. Si $S_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$, déterminez la plus petite valeur de n pour laquelle $S_n < 0$.

Références

Les réponses aux exercices se retrouvent dans les références suivantes. À noter que le Club Math possède une copie du livre *Art of Problem Solving. Competition Math for Middle School*.

— Atelier électronique Euclide du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique (CEMI) de l'Université de Waterloo.
https://cemc.uwaterloo.ca/contests/euclid_eWorkshop-f.html
— J. Batterson, *Art of Problem Solving. Competition Math for Middle School*, 978-1-934124-20-8.
https://artofproblemsolving.com/store/book/competition-math