

Comment les mathématiques peuvent vous aider à trouver l'âme soeur

Nadia Lafrenière

Université Concordia

Cégep de Sherbrooke

12 février 2024

Un extrait vidéo pour illustrer le problème...



Le problème des secrétaires peut être formulé ainsi :

- Il n'y a qu'un poste à combler;

Le problème des secrétaires peut être formulé ainsi :

- Il n'y a qu'un poste à combler;
- On connaît le nombre de candidates ou de candidats pour un poste;

Le problème des secrétaires peut être formulé ainsi :

- Il n'y a qu'un poste à combler;
- On connaît le nombre de candidates ou de candidats pour un poste;
- Une fois qu'on les a toutes rencontrées, on peut ordonner les candidatures de la moins bonne à la meilleure;

Le problème des secrétaires peut être formulé ainsi :

- Il n'y a qu'un poste à combler;
- On connaît le nombre de candidates ou de candidats pour un poste;
- Une fois qu'on les a toutes rencontrées, on peut ordonner les candidatures de la moins bonne à la meilleure;
- Les candidates et candidats sont rencontrés.e.s séquentiellement dans un ordre aléatoire;

Le problème des secrétaires peut être formulé ainsi :

- Il n'y a qu'un poste à combler;
- On connaît le nombre de candidates ou de candidats pour un poste;
- Une fois qu'on les a toutes rencontrées, on peut ordonner les candidatures de la moins bonne à la meilleure;
- Les candidates et candidats sont rencontrés séquentiellement dans un ordre aléatoire;
- La décision d'accepter ou de rejeter une candidature est prise dès la fin de l'entretien et uniquement à partir des données disponibles à ce moment-là;

Le problème des secrétaires peut être formulé ainsi :

- Il n'y a qu'un poste à combler;
- On connaît le nombre de candidates ou de candidats pour un poste;
- Une fois qu'on les a toutes rencontrées, on peut ordonner les candidatures de la moins bonne à la meilleure;
- Les candidates et candidats sont rencontrés séquentiellement dans un ordre aléatoire;
- La décision d'accepter ou de rejeter une candidature est prise dès la fin de l'entretien et uniquement à partir des données disponibles à ce moment-là;
- L'objectif est d'embaucher LA meilleure personne parmi toutes les postulantes. On cherche donc à maximiser la probabilité d'atteindre ce but.

Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.

1

Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.

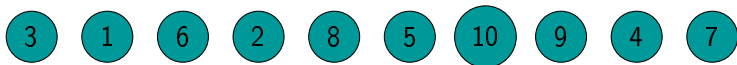


Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Après coup, on peut classer les candidates qu'on a rencontrées :



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.

1

Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Après coup, on peut classer les candidates qu'on a rencontrées :



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.

1

Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Jouons au patron!

On va essayer de trouver une stratégie avec 10 candidates.



Après coup, on peut classer les candidates qu'on a rencontrées :



Sachant le nombre de candidatures pour un poste, la **meilleure stratégie** consiste à rencontrer un certain nombre d'entre elles et **toutes les rejeter**, jusqu'à un certain moment t , le ***temps d'arrêt***.

Après le temps d'arrêt, on choisit la première candidature meilleure que toutes celles qu'on avait vues!

Définition

C'est quoi un temps d'arrêt?

*Un temps d'arrêt est une **décision** que l'on prend basée sur l'information qu'on a à ce moment-là. Il se produit lorsqu'on a une suite d'événements qui peuvent, ou non, se produire et qu'on prend la décision sans savoir ce qui se passera dans le futur.*

Définition

C'est quoi un temps d'arrêt?

*Un temps d'arrêt est une **décision** que l'on prend basée sur l'information qu'on a à ce moment-là. Il se produit lorsqu'on a une suite d'événements qui peuvent, ou non, se produire et qu'on prend la décision sans savoir ce qui se passera dans le futur.*

Exemple

Supposons qu'on joue à un jeu de hasard (avec mise). Alors,

- *La décision de jouer jusqu'à ce qu'on ait plus d'argent qu'on ne pourra jamais en avoir n'est pas un temps d'arrêt.*

Définition

C'est quoi un temps d'arrêt?

*Un temps d'arrêt est une **décision** que l'on prend basée sur l'information qu'on a à ce moment-là. Il se produit lorsqu'on a une suite d'événements qui peuvent, ou non, se produire et qu'on prend la décision sans savoir ce qui se passera dans le futur.*

Exemple

Supposons qu'on joue à un jeu de hasard (avec mise). Alors,

- *La décision de jouer jusqu'à ce qu'on ait plus d'argent qu'on ne pourra jamais en avoir n'est pas un temps d'arrêt.*
- *La décision de jouer jusqu'à ce qu'on perde de l'argent ou qu'on double notre mise est un temps d'arrêt.*

Définition

C'est quoi un temps d'arrêt?

*Un temps d'arrêt est une **décision** que l'on prend basée sur l'information qu'on a à ce moment-là. Il se produit lorsqu'on a une suite d'événements qui peuvent, ou non, se produire et qu'on prend la décision sans savoir ce qui se passera dans le futur.*

Exemple

Supposons qu'on joue à un jeu de hasard (avec mise). Alors,

- *La décision de jouer jusqu'à ce qu'on ait plus d'argent qu'on ne pourra jamais en avoir n'est pas un temps d'arrêt.*
- *La décision de jouer jusqu'à ce qu'on perde de l'argent ou qu'on double notre mise est un temps d'arrêt.*
- *La décision de jouer 5 parties est un temps d'arrêt.*

C'est quand le bon temps d'arrêt?

C'est quand le bon temps d'arrêt?

On veut trouver quand arrêter d'éliminer systématiquement les candidats :

- Il faut arrêter avant de rencontrer la meilleure personne : si on arrête trop tard, on la disqualifiera;
- Si on arrête trop tôt, on est peu sélectifs et la personne choisie n'est possiblement pas la meilleure.

On peut utiliser les probabilités pour trouver le meilleur moment.

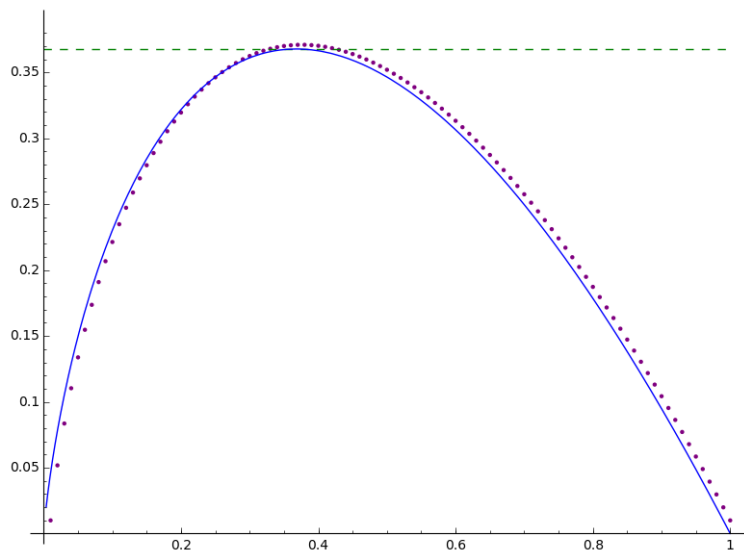
On désigne par t le temps d'arrêt.

Résoudre le problème

On calcule la probabilité de réussir notre mission en utilisant la stratégie. Cette probabilité dépend de t , on la notera donc $P(t)$.
On rappelle qu'il y a n candidates.

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \sum_{i=1}^n \text{Prob}\{i \text{ soit le meilleur candidat ET soit choisi}\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \text{Prob}\{i \text{ soit choisi} \mid \text{il est le meilleur candidat}\} \\
 &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^t 0 + \sum_{i=t+1}^n \text{Prob}\{\text{Le meilleur des } i-1 \text{ premiers est rejeté}\} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=t+1}^n \frac{t}{i-1} \xrightarrow{n \text{ grand}} -\frac{t}{n} \ln\left(\frac{t}{n}\right).
 \end{aligned}$$

Probabilité de sélectionner la bonne candidate :

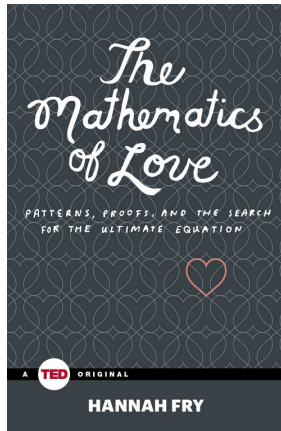


Conclusion :

- Le meilleur temps d'arrêt est à 37% des candidates
- En suivant cette stratégie, on a environ 37% de chances d'atteindre notre but.
- Si on ne l'atteint pas, il y a deux possibilités : n'embaucher personne (37%), ou embaucher une personne moins bonne (26%).

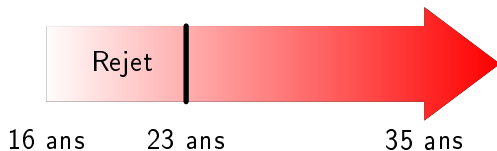
Similitudes et divergences avec de vraies situations

- Une relation amoureuse monogame



Similitudes et divergences avec de vraies situations

- Une relation amoureuse monogame



Similitudes et divergences avec de vraies situations

- Des poissons, dont la saison des amours est une période définie de l'année, utilisent cette stratégie.

Similitudes et divergences avec de vraies situations

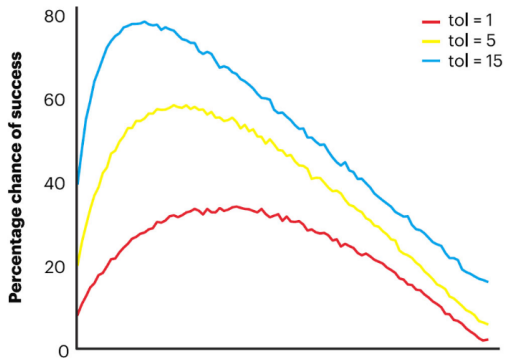
- Des poissons, dont la saison des amours est une période définie de l'année, utilisent cette stratégie.
- La recherche d'un appartement

Similitudes et divergences avec de vraies situations

- Des poissons, dont la saison des amours est une période définie de l'année, utilisent cette stratégie.
- La recherche d'un appartement
- Des psychologues et des économistes ont étudié le comportement de personnes travaillant avec des secrétaires et ont observé qu'elles arrêtaient souvent de chercher trop tôt pour que le modèle soit valide.

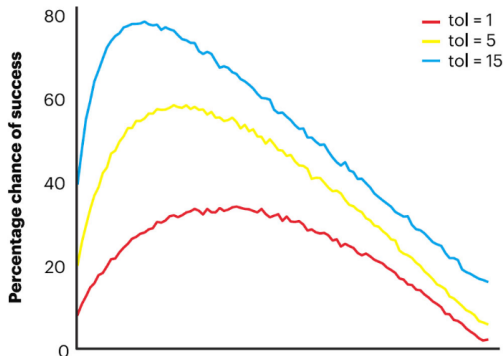
Peut-on espérer faire mieux?

- Si on était plus flexible :



Peut-on espérer faire mieux?

- Si on était plus flexible :



- On pourrait changer les hypothèses pour prendre en compte que ce n'est pas tout le monde qui s'intéresse à nous!

Comment faire pour rencontrer des partenaires potentiels?



Comment est-il possible qu'il y ait si peu de partenaires?

Comment est-il possible qu'il y ait si peu de partenaires?

Peter Backus, un mathématicien longtemps célibataire, a calculé qu'il y avait potentiellement plus de civilisations extraterrestres intelligentes que de partenaires potentielles pour lui.

La formule de Drake

La formule de Drake a été développée en 1961 par l'astronome Frank Drake pour estimer le nombre de civilisations extraterrestres avec lesquelles nous pourrions communiquer.

La formule de Drake

La formule de Drake a été développée en 1961 par l'astronome Frank Drake pour estimer le nombre de civilisations extraterrestres avec lesquelles nous pourrions communiquer.

Elle s'exprime comme-ci :

$$N = R^* \times f_p \times n_e \times f_i \times f_c \times L,$$

où

- N est le nombre de civilisations estimées
- R^* est le nombre de nouvelles étoiles formées par année
- f_p est la fraction de ces étoiles qui possèdent des planètes
- n_e est le nombre moyen de planètes abritant la vie par étoile
- f_i est la fraction de ces planètes abritant une vie intelligente
- f_c est la fraction de ces populations capables et désirant communiquer avec des civilisations extraterrestres
- L est la durée de vie de chacune des civilisations

La formule de Drake

Drake a trouvé qu'il y avait potentiellement 10 000 civilisations extraterrestres dans la voie lactée avec lesquelles nous pourrions entrer en contact.

La formule de Drake

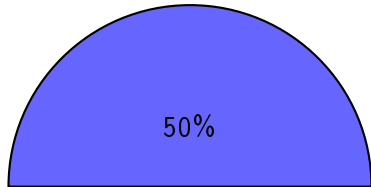
Drake a trouvé qu'il y avait potentiellement 10 000 civilisations extraterrestres dans la voie lactée avec lesquelles nous pourrions entrer en contact.

Peter Backus a trouvé qu'il y avait 26 femmes qu'il pouvait courtiser. C'est 400 fois moins!

La formule de Backus

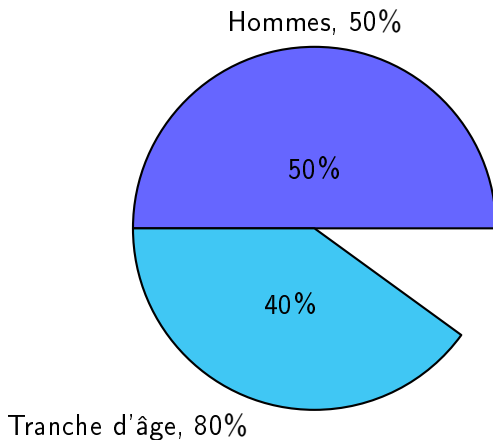
Peter Backus peut exprimer sa formule de la même façon.

Hommes, 50%



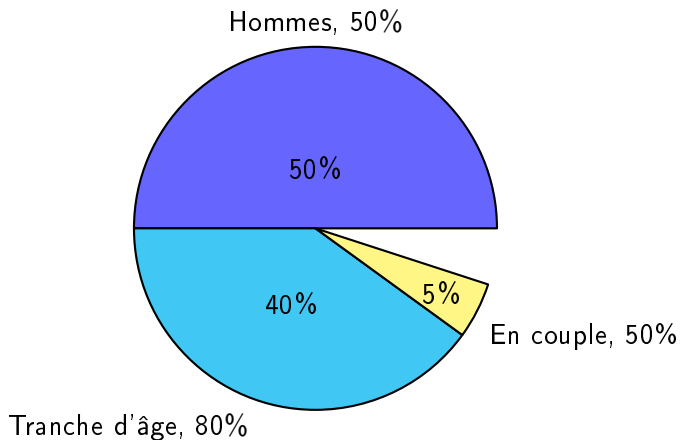
La formule de Backus

Peter Backus peut exprimer sa formule de la même façon.



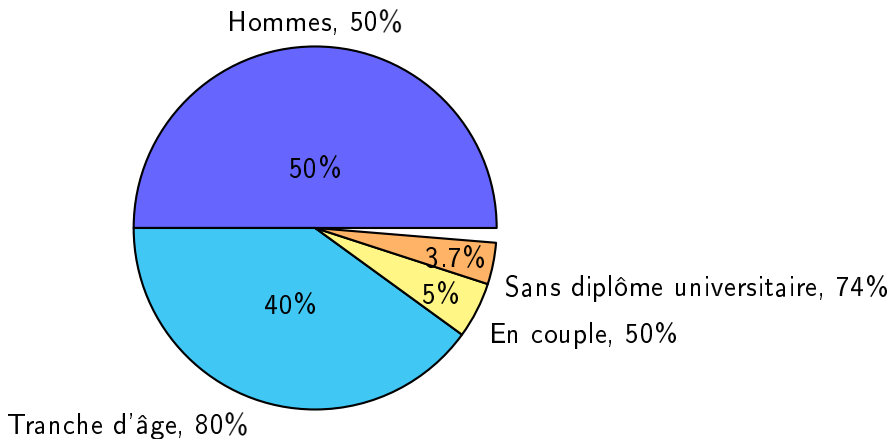
La formule de Backus

Peter Backus peut exprimer sa formule de la même façon.



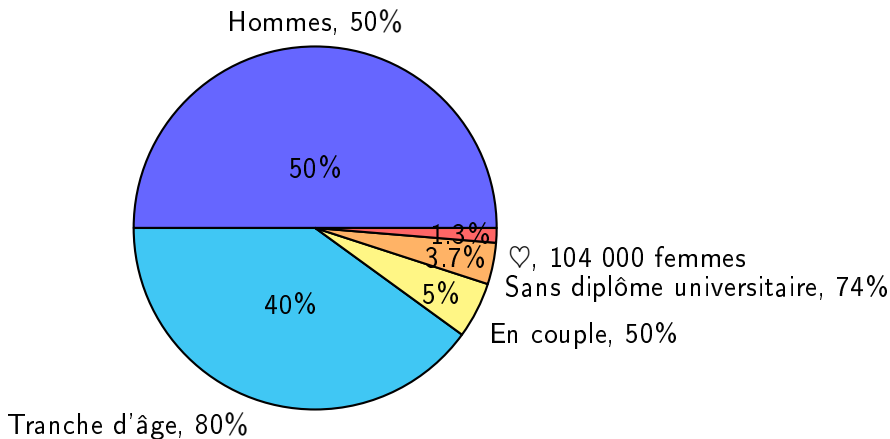
La formule de Backus

Peter Backus peut exprimer sa formule de la même façon.



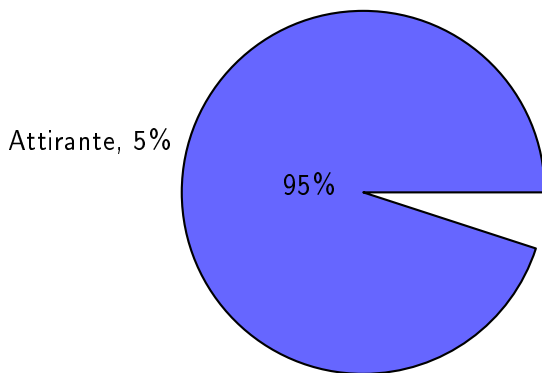
La formule de Backus

Peter Backus peut exprimer sa formule de la même façon.



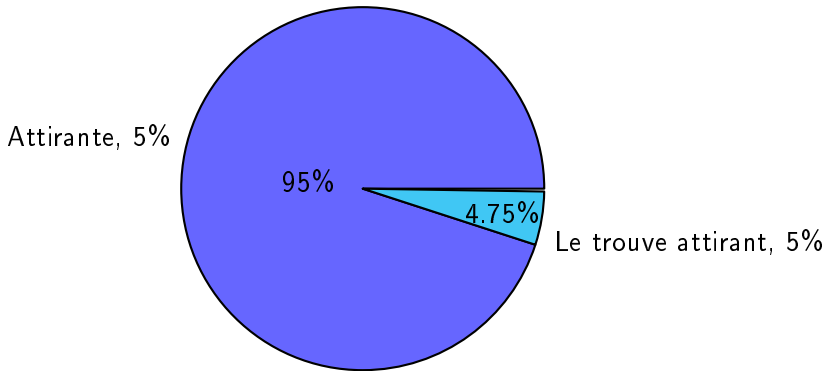
La formule de Backus

Mais ce n'est pas tout :



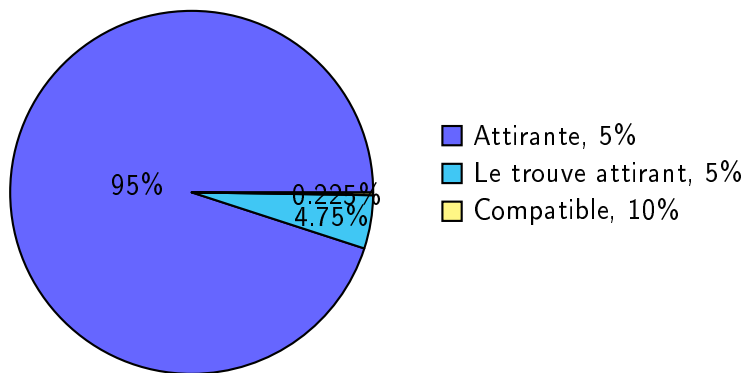
La formule de Backus

Mais ce n'est pas tout :



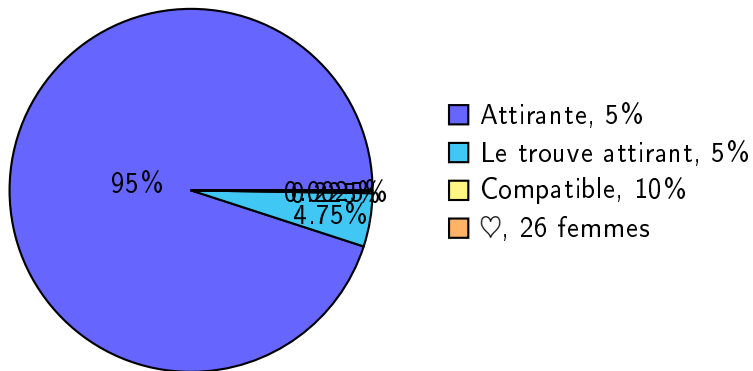
La formule de Backus

Mais ce n'est pas tout :



La formule de Backus

Mais ce n'est pas tout :



Refaisons l'expérience, avec d'autres critères :

Refaisons l'expérience, avec d'autres critères :

- Il y a 400 000 femmes célibataires dans la bonne tranche d'âge à Londres.

Refaisons l'expérience, avec d'autres critères :

- Il y a 400 000 femmes célibataires dans la bonne tranche d'âge à Londres.
- Si 20% d'entre elles le trouvent attirant → 80 000 femmes.

Refaisons l'expérience, avec d'autres critères :

- Il y a 400 000 femmes célibataires dans la bonne tranche d'âge à Londres.
- Si 20% d'entre elles le trouvent attirant \rightarrow 80 000 femmes.
- S'il trouve 20% d'entre elles attirantes \rightarrow 16 000 femmes.

Refaisons l'expérience, avec d'autres critères :

- Il y a 400 000 femmes célibataires dans la bonne tranche d'âge à Londres.
- Si 20% d'entre elles le trouvent attirant \rightarrow 80 000 femmes.
- S'il trouve 20% d'entre elles attirantes \rightarrow 16 000 femmes.
- S'il s'entend bien avec 20% d'entre elles \rightarrow 3 200 femmes.

C'est une personne sur 2 500 à Londres!

Est-ce que la formule de Drake est appropriée?

Plusieurs critiques ont été faites par rapport à l'équation de Drake :

- On sait tellement mal estimer les paramètres, que la marge d'erreur devient déraisonnable.

Est-ce que la formule de Drake est appropriée?

Plusieurs critiques ont été faites par rapport à l'équation de Drake :

- On sait tellement mal estimer les paramètres, que la marge d'erreur devient déraisonnable.
- Certains se demandent comment c'est possible alors qu'on n'ait jamais rencontré de civilisations extraterrestres.

Est-ce que la formule de Drake est appropriée?

Plusieurs critiques ont été faites par rapport à l'équation de Drake :

- On sait tellement mal estimer les paramètres, que la marge d'erreur devient déraisonnable.
- Certains se demandent comment c'est possible alors qu'on n'ait jamais rencontré de civilisations extraterrestres.
- Frank Drake dit que ça permet de stimuler la conversation.

Est-ce que la formule de Drake est appropriée?

Plusieurs critiques ont été faites par rapport à l'équation de Drake :

- On sait tellement mal estimer les paramètres, que la marge d'erreur devient déraisonnable.
- Certains se demandent comment c'est possible alors qu'on n'ait jamais rencontré de civilisations extraterrestres.
- Frank Drake dit que ça permet de stimuler la conversation.
- Une très mauvaise estimation avec la formule de Drake :



Comment les mathématiques peuvent vous aider à trouver l'âme soeur

└ Augmenter son bassin de candidats

Pour aller plus loin...

