L'ANAMORPHOSE

Oeuvre, graphique ou picturale, dont les formes sont distordues de telle manière qu'elle ne reprenne sa configuration véritable qu'en étant regardée soit directement, sous un angle particulier, soit indirectement, dans un miroir cylindrique, conique, etc.

Dictionnaire LAROUSSE

ORIGINE :

À partir du XVIIe siècle, le mot est dérivé du grec *anamorphoein : ana* = de retour, ou encore, et *morphē* = forme, donc *morphose* = à transformer ou, ensemble, à retransformer.

Anamorphose de 1842 par V. Sies : le motif n'est visible que de dessus.

Il y a deux types principaux d'anamorphose :

- Anamorphose en perspective (centrale) dans laquelle seul un point de vue spécifique est nécessaire pour recréer l'image.

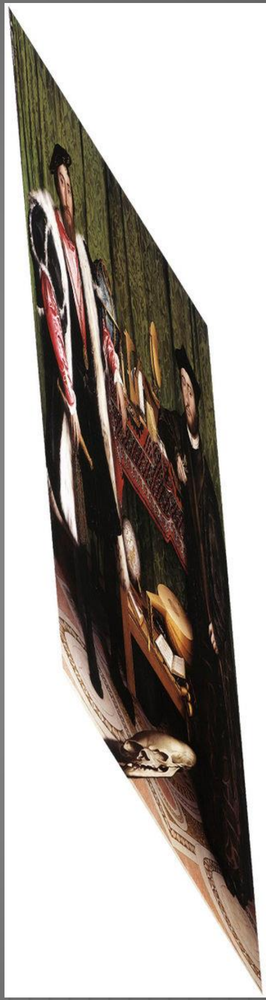
- Anamorphose à l’aide d’un miroir courbe où l’utilisation d’une surface réfléchissante est nécessaire pour recréer l'image.

Dans les deux cas il s’agit d’une transformation mathématique qui décrit le processus de récupérer l’image dans sa forme souhaitée !

➢ Anamorphose en perspective au Moyen Âge…

Les Ambassadeurs (Londres, 1533)
par Hans Holbein le Jeune

➢ Anamorphose en perspective au Moyen Âge…



Les Ambassadeurs (Londres, 1533)
par Hans Holbein le Jeune

Édouard VI par William (Guillim) Scrots (1546)

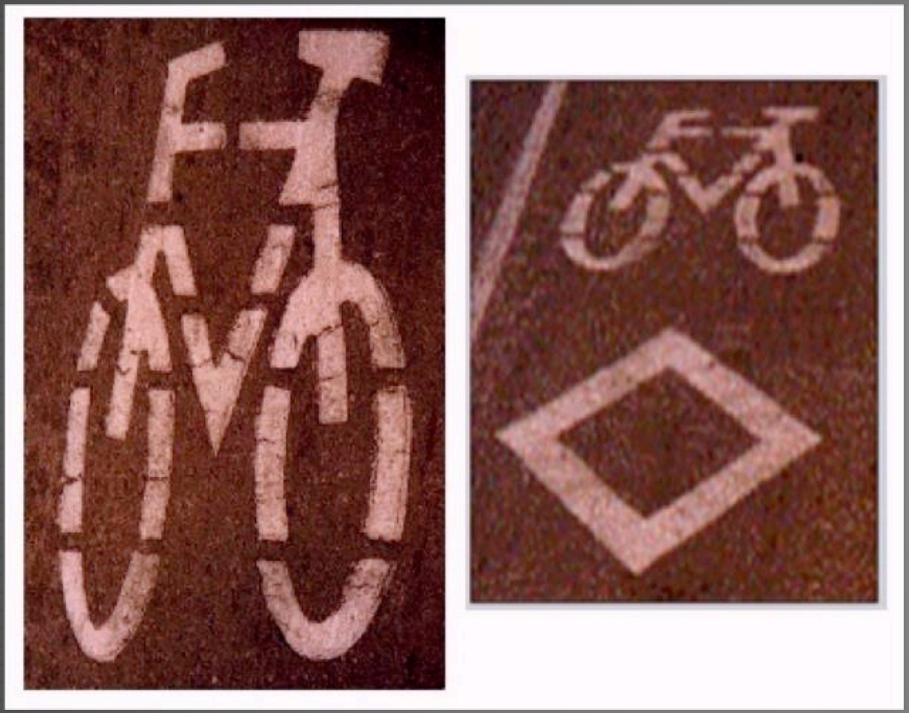
L'un des portraits les plus étonnants d'Édouard VI date de 1546. L'image du prince y est déformée par le procédé d'anamorphose : son profil flottant devant un paysage finit par prendre forme dans l'œil du spectateur, lorsque celui-ci l'observe depuis un certain point de vue, sur le côté droit.

Le cadre d'origine (faisant bloc avec le support) a été conservé sans doute parce qu'une entaille indiquait clairement où il fallait placer l'œil pour percevoir l'image sans déformation.

Édoaurd VI par William Scrots (1546)

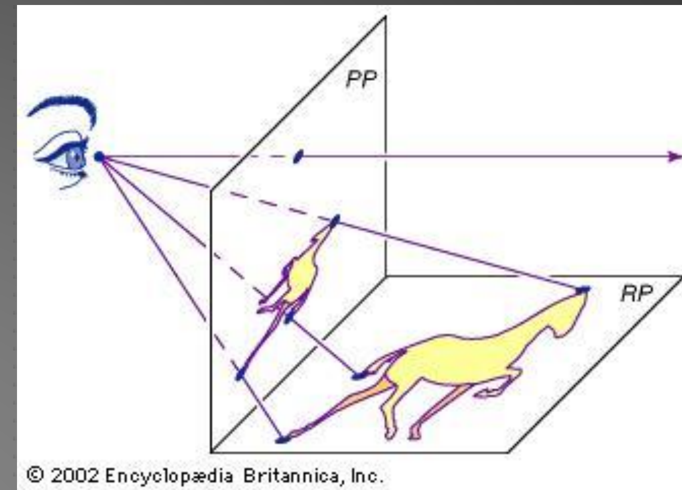
https://www.npg.org.uk/collections/search/portrait/mw02032/King-Edward-VI

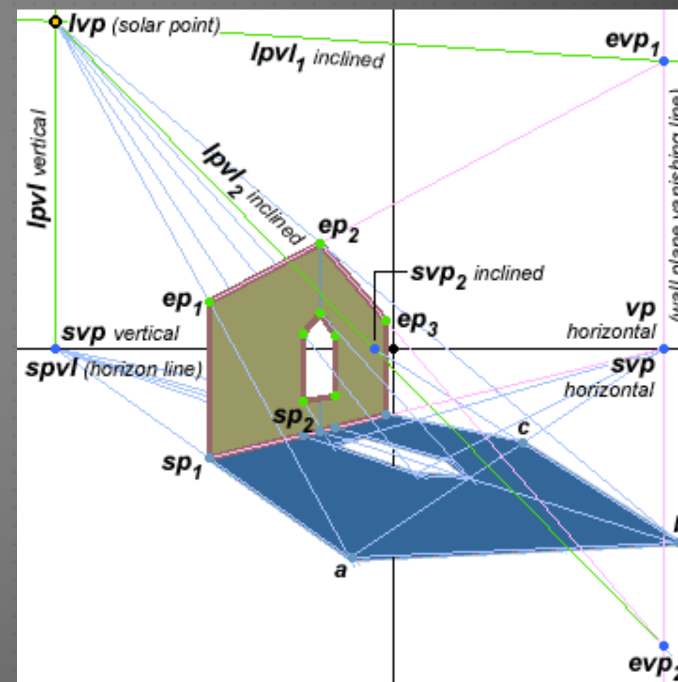
…et, en pratique, dans la vie quotidienne !



L'image à gauche est le vélo qui est peint sur la route; l'image sur la droite est le vélo tel que vu par le cycleur.

- Point de fuite en perspective - sujet de géométrie projective)

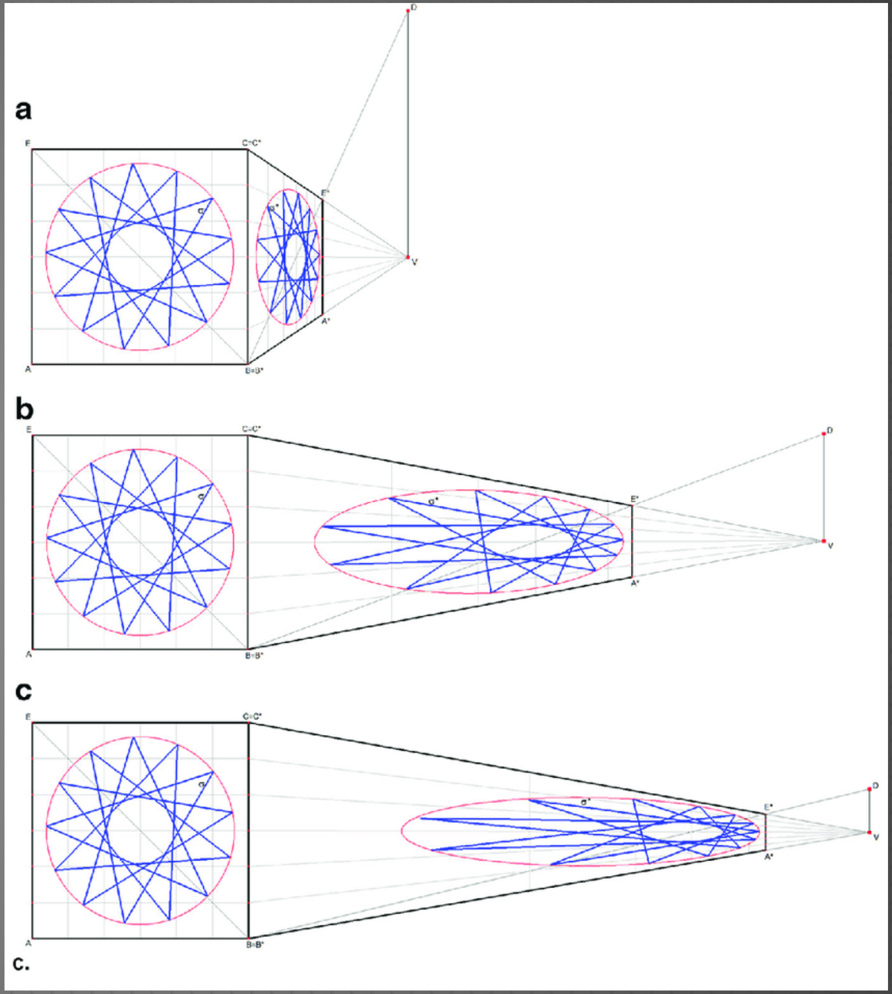




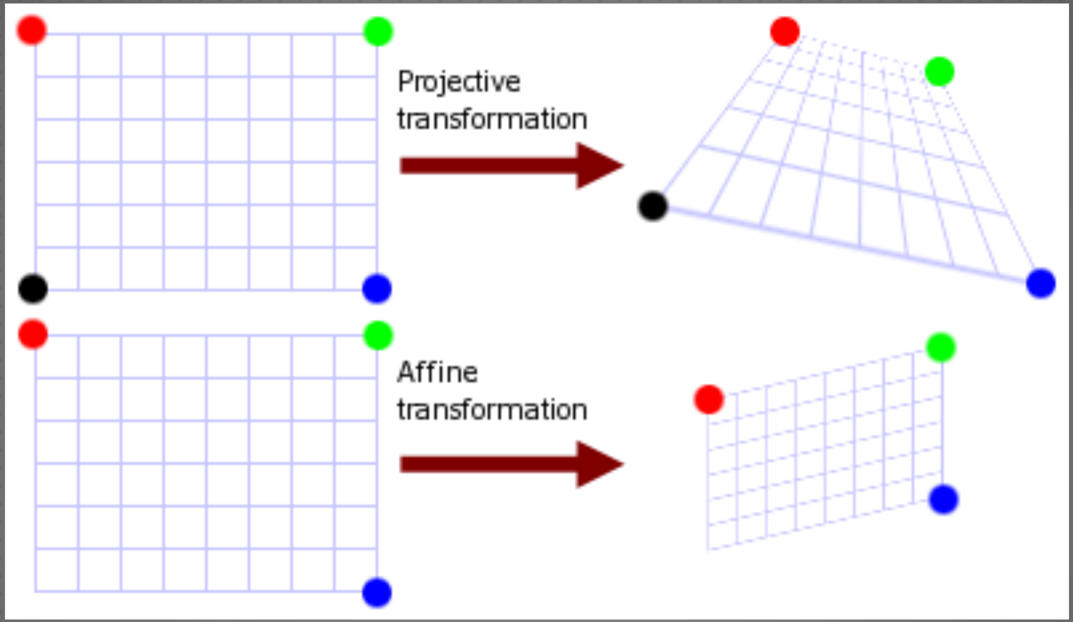
➢ Anamorphose en perspective

Pour l'obtenir, nous transformons une grille rectangulaire dans une grille trapézoïdale.

Une fois que la forme a été imprimée sur une feuille de papier, VD indique la distance de V de la feuille pour observer l'image. En changeant dynamiquement les positions des points, il est possible d'obtenir différentes déformations anamorphiques (a, b, c).



Alors, que fait une transformation projective qu'une affine ou une linéaire ne peut pas faire?



Transformer une grille rectangulaire dans un quadrilatère (quelconque) ou même dans un trapèze isocèle.

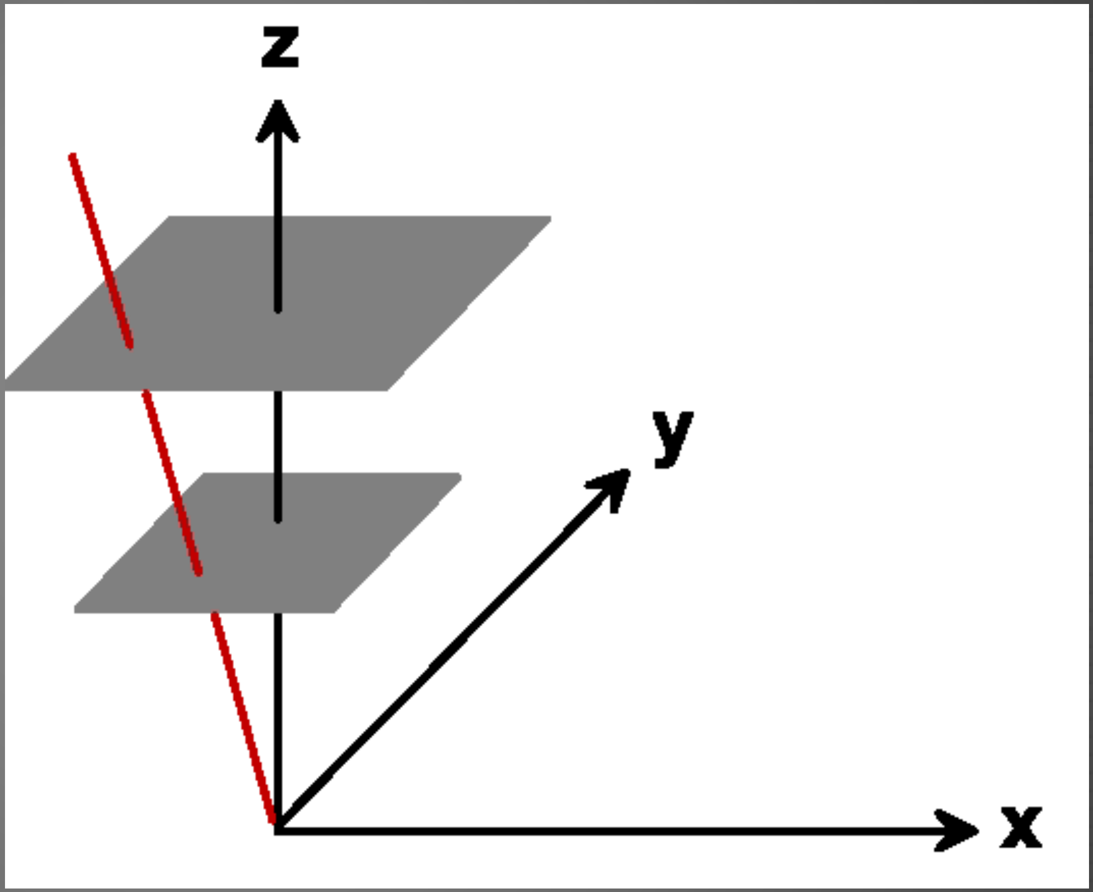
Un dernier mot sur les coordonnées homogènes (introduites par Möbius):

Deux points (x,y,z) et (x',y',z') sont égaux si et seulement si (x/z, y/z)=(x'/z', y'/z').

Si z=0, on dit que le point est à l'infini.

- Utiles pour les projections.

- Fournissent un modèle du plan dans lequel deux lignes quelconques se croisent toujours (même si elles pourraient le faire à l'infini.



On sait que toute transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peut être représentée par une matrice 2×2 :

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

On sait que toute transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peut être représentée par une matrice 2×2 :

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

En réalité, T peut être aussi représentée par une matrice 3×3, si on regarde $\mathbb{R}^2$ comme un plan horizontal en $\mathbb{R}^3$, disons

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \hookrightarrow (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3.$$

On sait que toute transformation linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peut être représentée par une matrice 2×2 :

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

En réalité, T peut être aussi représentée par une matrice 3×3, si on regarde $\mathbb{R}^2$ comme un plan horizontal en $\mathbb{R}^3$, disons

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \hookrightarrow (x,y,1) \in \mathbb{R}^3.$$

Alors, la même transformation T s'écrit

$$T(x,y,1) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on peut demander quel est l'effet du T pour tout $\mathbb{R}^3$.

Une transformation affine en $\mathbb{R}^2$ est une transformation du type

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad A(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

et elle ne peut pas être représentée par une matrice carrée 2×2.

Une transformation affine en $\mathbb{R}^2$ est une transformation du type

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad A(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

et elle ne peut pas être représentée par une matrice carrée 2×2. Mais, si on regarde de nouveau $\mathbb{R}^2$ comme le plan horizontal

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \hookrightarrow (x, y, 1) \in \mathbb{R}^3,$$

alors

$$A(x, y, 1) = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix},$$

définit une transformation linéaire suivie par une translation dans la direction du vecteur $\mathbf{v} = (e, f)$ dans le plan horizontal qu'on a identifié avec $\mathbb{R}^2$, donc la transformation affine A.

Les transformations affines ne suffisent pas à l'anamorphose ! Transformations Projectives

- Les droites parallèles restent parallèles lors de transformations linéaires (ainsi qu'affines donc).

Les transformations affines ne suffisent pas à l'anamorphose ! Transformations Projectives

• Les droites parallèles restent parallèles lors de transformations linéaires (ainsi qu'affines donc).
Nous allons passer aux transformations projectives :

$$P(x, y, 1) = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx' \\ sy' \\ s \end{pmatrix} \rightarrow_{s \neq 0} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les transformations affines ne suffisent pas à l'anamorphose ! Transformations Projectives

• Les droites parallèles restent parallèles lors de transformations linéaires (ainsi qu'affines donc).
Nous allons passer aux transformations projectives :

$$P(x, y, 1) = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx' \\ sy' \\ s \end{pmatrix} \rightarrow_{s \neq 0} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

• Une transformation projective ne préserve pas le parallélisme, ni distance, ni angle, mais préserve toujours la collinéarité et l'incidence.

• Comme les transformations affines sont un cas particulier de transformations projectives, elles ont les dernières prorpriétés aussi, mais elles conservent aussi le parallélisme.

Supposons que nous cherchions la transformation projective prenant le carré des sommets $A(-2,2)$, $B(2,2)$, $C(2,-2)$, $D(-2,-2)$ dans le trapèze formé par les sommets $A'(-3,2)$, $B'(3,1)$, $C'(3,-1)$, $D'(-3,-2)$.

Supposons que nous cherchions la transformation projective prenant le carré des sommets $A(-2,2)$, $B(2,2)$, $C(2,-2)$, $D(-2,-2)$ dans le trapèze formé par les sommets $A'(-3,2)$, $B'(3,1)$, $C'(3,-1)$, $D'(-3,-2)$.

À partir de

$$P(x,y,1) = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx' \\ sy' \\ s \end{pmatrix},$$

en écrivant les équations pour l'envoi du point A dans le point A', nous avons

$$\begin{cases} -2a + 2b + e = -3s \\ -2c + 2d + f = s \\ -2g + 2h + 1 = s. \end{cases}$$

Trouver des Transformations Projectives

Supposons que nous cherchions la transformation projective prenant le carré des sommets $A(-2,2)$, $B(2,2)$, $C(2,-2)$, $D(-2,-2)$ dans le trapèze formé par les sommets $A'(-3,2)$, $B'(3,1)$, $C'(3,-1)$, $D'(-3,-2)$.

À partir de

$$P(x,y,1) = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx' \\ sy' \\ s \end{pmatrix},$$

en écrivant les équations pour l'envoi du point A dans le point A', nous avons

$$\begin{cases} -2a + 2b + e = -3s \\ -2c + 2d + f = s \\ -2g + 2h + 1 = s. \end{cases}$$

Trop de variables?

Non, parce que

$$\begin{cases} ax + by + e = sx' \\ cx + dy + f = sy' \\ gx + hy + 1 = s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = \dfrac{ax + by + e}{gx + hy + 1} \\ y' = \dfrac{cx + dy + f}{gx + hy + 1} \end{cases}$$

Non, parce que

$$\begin{cases} ax + by + e = sx' \\ cx + dy + f = sy' \\ gx + hy + 1 = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{ax + by + e}{gx + hy + 1} \\ y' = \dfrac{cx + dy + f}{gx + hy + 1} \end{cases}$$

et donc nous obtenons un système linéaire en a, b, c, d, e, f, g (8 équations pour 8 inconnues), deux pour chaque paire de points $\{A, A'\}, \{B, B'\}, \{C, C'\}, \{D, D'\}$ tels que :

$$\begin{cases} (gx + hy + 1)x' = ax + by + e \\ (gx + hy + 1)y' = cx + dy + f. \end{cases}$$

Ainsi, la transformation projective est déterminée en résolvant le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_A x_{A'} & -y_A x_{A'} \\ x_B & y_B & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_B x_{B'} & -y_B x_{B'} \\ x_C & y_C & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_C x_{C'} & -y_C x_{C'} \\ x_D & y_D & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_D x_{D'} & -y_D x_{D'} \\ 0 & 0 & 0 & x_A & y_A & 1 & -x_A y_{A'} & -y_A y_{A'} \\ 0 & 0 & 0 & x_B & y_B & 1 & -x_B y_{B'} & -y_B y_{B'} \\ 0 & 0 & 0 & x_C & y_C & 1 & -x_C y_{C'} & -y_C y_{C'} \\ 0 & 0 & 0 & x_D & y_D & 1 & -x_D y_{D'} & -y_D y_{D'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ e \\ c \\ d \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{A'} \\ x_{B'} \\ x_{C'} \\ x_{D'} \\ y_{A'} \\ y_{B'} \\ y_{C'} \\ y_{D'} \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour notre exemple, la transformation projective est définie par
$a = 3/2, b = 0, e = 1, c = 0, d = 2/3, f = 0, g = 1/6, h = 0$, so

$$P(x, y, 1) = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$P(-2, 2, 1) = (-2, 4/3, 2/3) = \frac{2}{3}(-3, 2, 1).$

$P(2, 2, 1) = (4, 4/3, 4/3) = \frac{4}{3}(3, 1, 1).$

$P(-2, -2, 1) = (-2, -4/3, 2/3) = \frac{2}{3}(-3, -2, 1).$

$P(2, -2, 1) = (4, -4/3, 4/3) = \frac{4}{3}(-3, -1, 1).$ $\square$

- Droites parallèles qui se rencontrent à l'infini – Le plan projectif

https://www.publicdomainpictures.net/pictures/260000/velka/infinity-railroad-tracks-1525580753Ehu.jpg

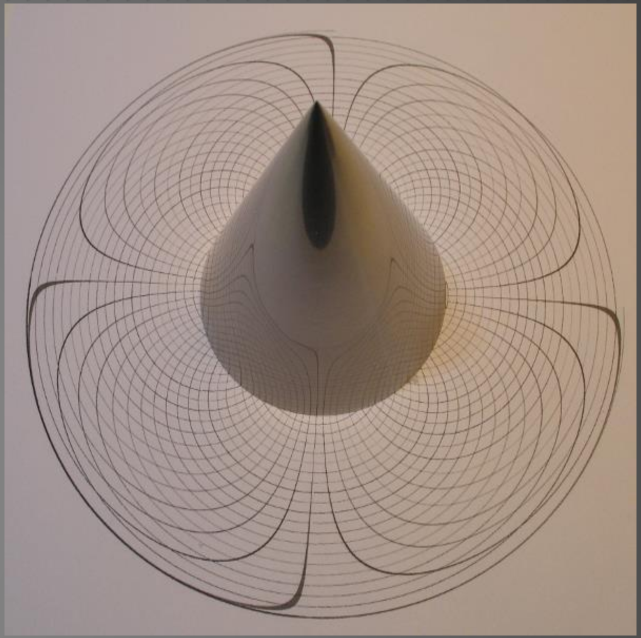
- Anamorphose avec des miroirs … artisanaux

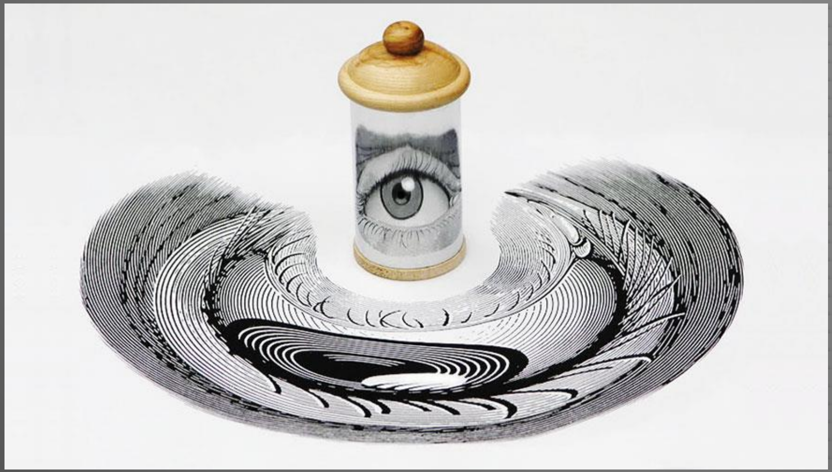
http://www.artistasvirdi.com/anamorphic-art/

- …et avec des miroirs spheriques, coniques, et cylindriques.

Le fou du Roi nu
par Louise FRITSCH

Musée d'Art Moderne et Contemporain de Strasbourg



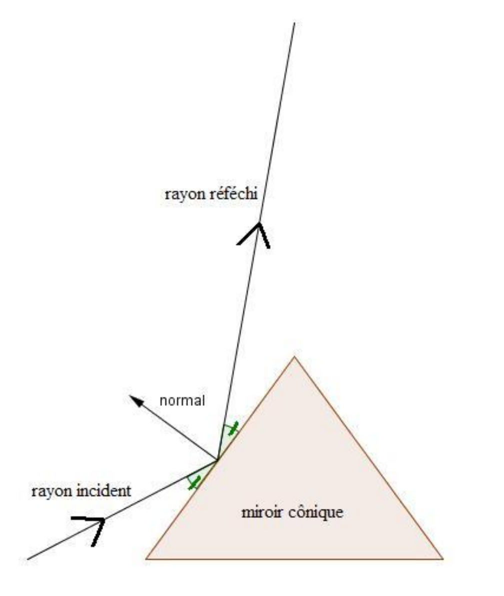


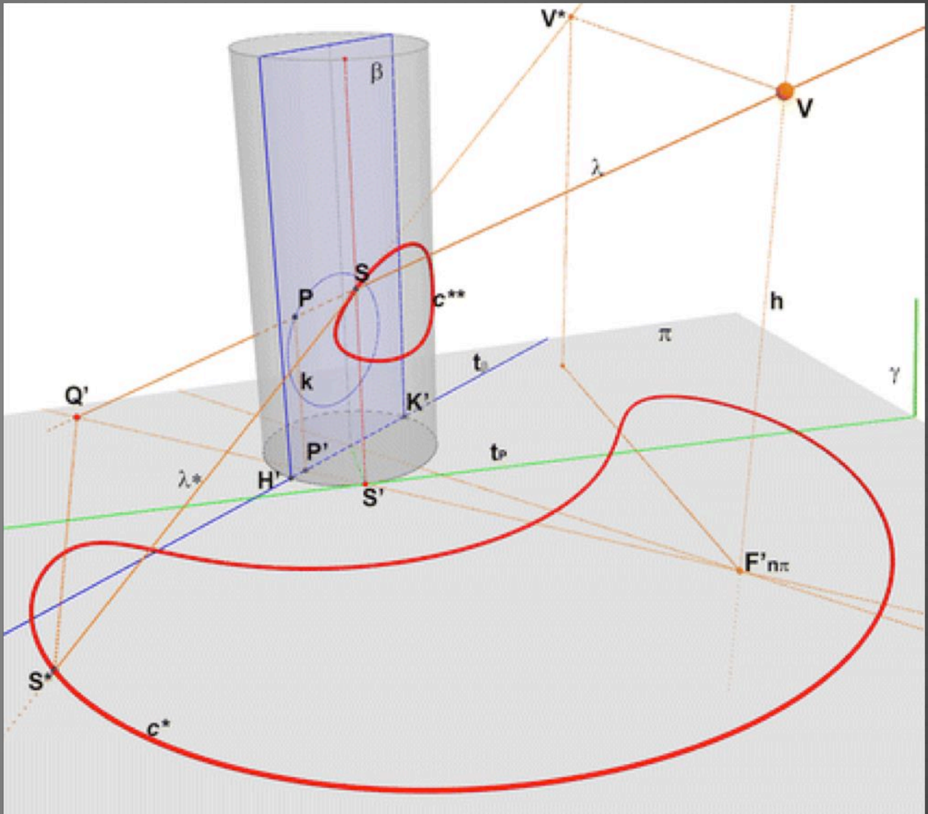
En haut : Image d’une grille

À gauche, l’un des magnifiques dessins d’Istvan Orosz

- Mirroirs courbées au Musée des Beaux Arts à Montréal, en été 2018

➢ Quelle est la transformation mathématique dans ce cas-là ?





Comme il s’agit d’un miroir, il y a une réflexion dont nous devrions pouvoir écrire les coordonnées.

➢ Maintenant les mathématiques …

La réflexion du point (x,y,z) du cylindre $x^2 + y^2 = R^2$ dans le plan $z = 0$,

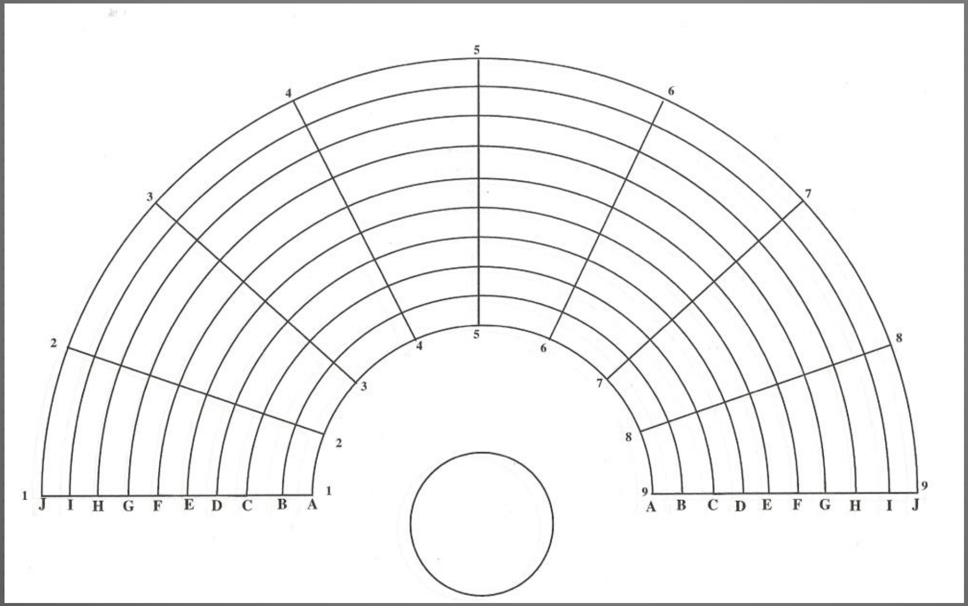
vu par un observateur situé à (x_0, y_0, z_0), est le point :

$$x_r = x - \frac{z}{z - z_0}\left[\frac{2x}{R^2}(x x_0 + y y_0) - (x + x_0)\right]$$

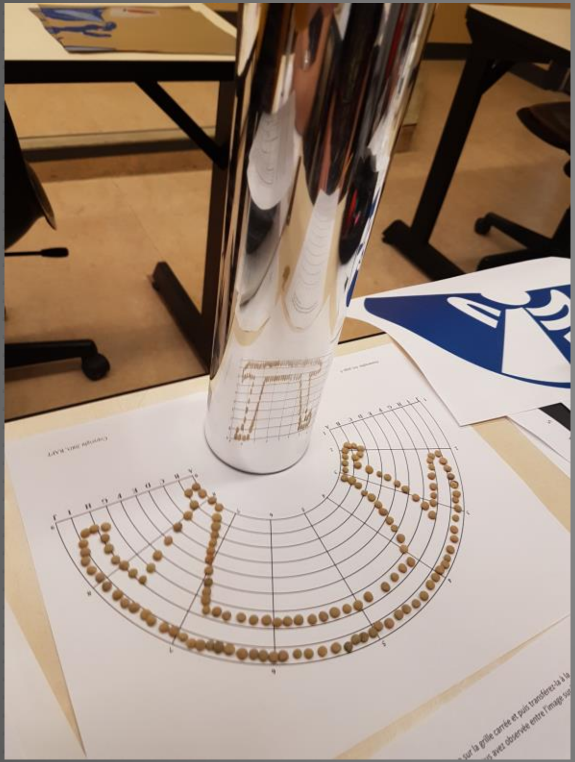
$$y_r = y - \frac{z}{z - z_0}\left[\frac{2y}{R^2}(x x_0 + y y_0) - (y + y_0)\right].$$

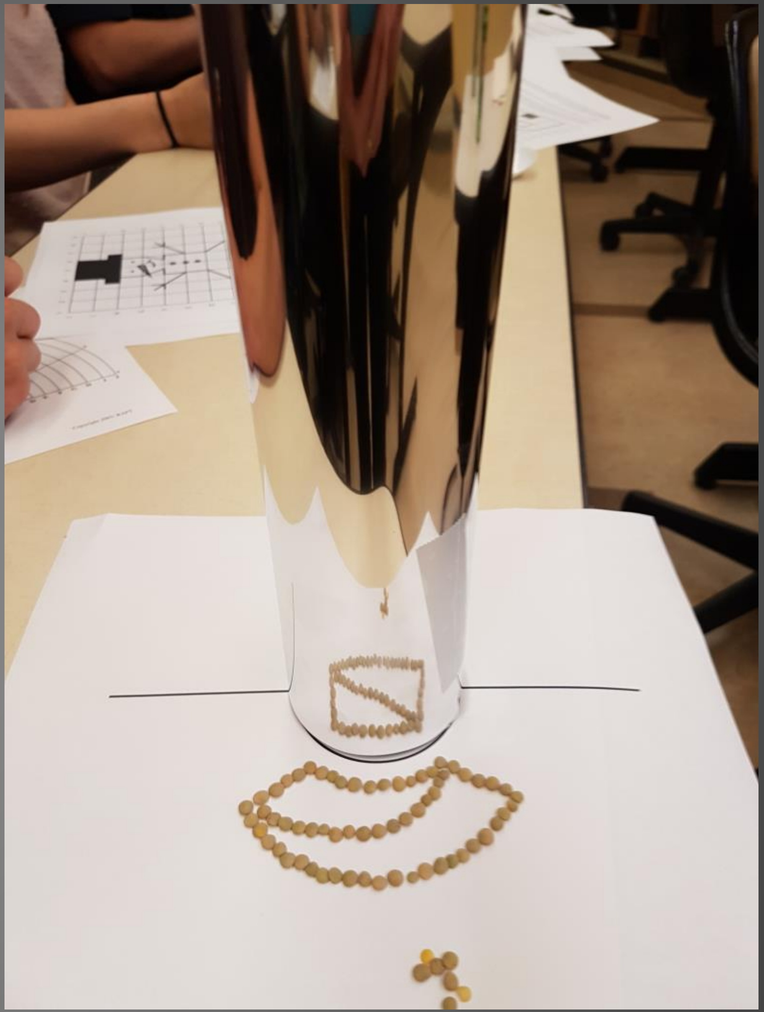
➢ En supposant que le spectateur soit placé devant le cylindre :

1. Les demi-cercles correspondent aux lignes horizontales (z=constante) sur la surface du cylindre tandis que
2. Les rayons émanant de l'origine correspondent aux lignes verticales (x=constante et y=constante) du cylindre.

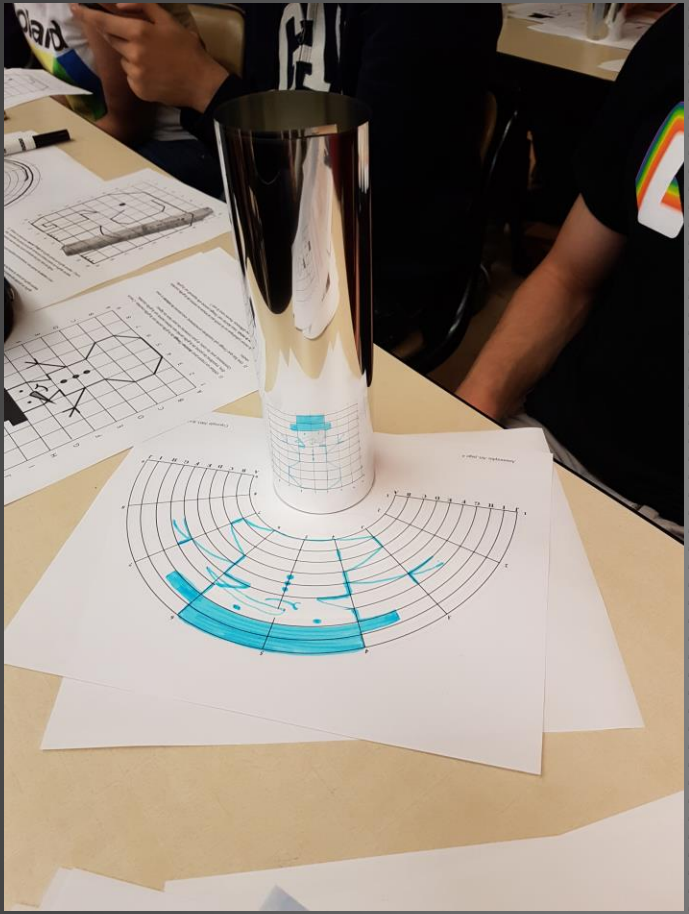


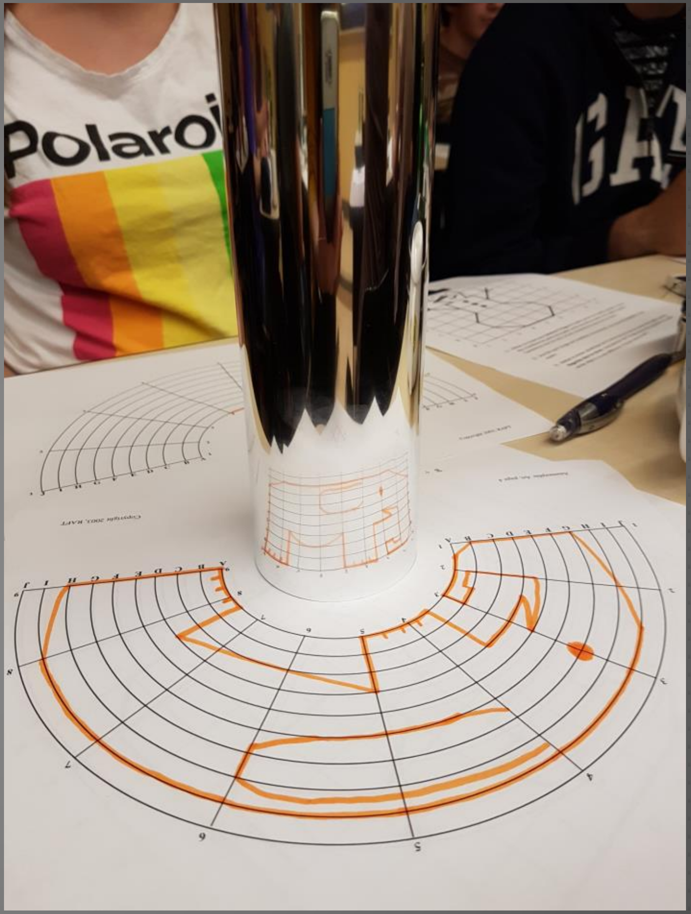
Quelques exemples :





… et deux autres :

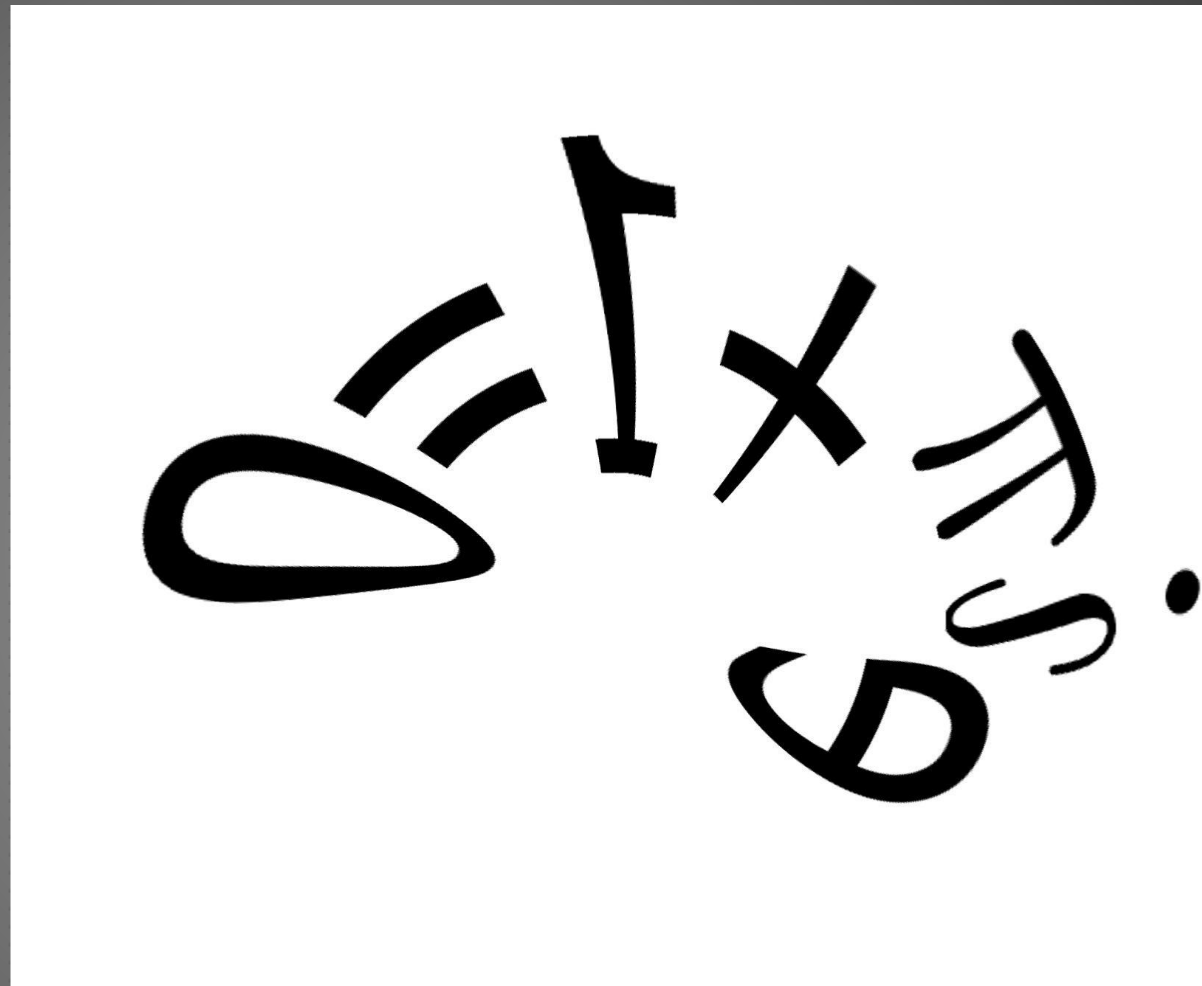




Connaissant le principe de base, certaines images sont faciles à décoder… comme l'exemple ici …

…ou ici ... pour les grands amateurs de super héros…

…mais déjà ici nous pouvons rencontrer de difficultés ...



Les trois dernières diapositives sont des images réalisées par Laura Broley (étudiante au doctorat, Concordia U.) avec un logiciel appelé Anamorph Me !

…mais peu probable à décoder sans mirror celle-ci qui appartient au artiste Istvan Orosz !

La fin…merci de votre attention!